Kostadin Trençevski
Aneta Gatsovska
Naditsa İvanovska

İKTİSATÇILAR İÇİN MATEMATİK

DÖRT YILLIK
MESLEKİ OKULLARA AİT
SINIF III

İKTİSAT - HUKUK VE TİCARET MESLEĞİ
TİCARET VE PAZARLAMA TEKNİSYENİ

Denetleyenler:
Dr. Bilyana Kırsteska, KMÜ, DMF öğretim üyesi, Üsküp - başkan,
Lidiya Kuzmanovska, ÜBOO “Lazar Tanev”, profesör, Üsküp, üye ve
Lyubitsa Dimitrova, ÜBOO “Gyoşo Vikentiev”, profesör, Koçana, üye

Düzelti: Dr. Aktan Ago

Yayıncı: Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı

Basımevi: Grafiçki Centar Ltd., Üsküp

Tiraz: 80

Bu kitap Makedonya Eğitim ve Bilim Bakan’ın no. 22-4386/1 ve 29.07.2010 tarihli kararnamesiyle kullanılmaya müsaade edilmiştir.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека “Св.Климент Охридски” , Скопје
512 . 1 (075.3)
51 - 77 (075.3)
ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Математика за економисти за III година на четиригодишното стручно образование: економско-правна и трговска струка техничар за трговија и маркетинг / Костадин Тренчевски, Анета Гацовска, Надица Ивановска. - Скопје: Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2011, - 288 стр. : граф. прикази ; 29 см
ISBN 978-608-226-177-5
1. Гацовска, Анета [автор] 2. Ивановска, Надица [автор]
COBISS.MK-ID 86465034

Ö n s ö z

İKTİSATÇILAR İÇİN MATEMATİK kitabı, dört yıllık mesleki eğitimin üçüncü sınıfına ait matematik dersinin plan ve programı üzere hazırlanmıştır. İktisat hukuku ve ticaret dersi plan ve programına göre, iktisat ve pazarlama teknisyeni – eğitim profili öğrencileri için öngörülmüştür. Amaç, okuyucuyu bir yandan iktisatta gerekli bazı matematiksel yöntemlerle tanıştırmak, öte yandan da matematiksel düşünmeye alıştırarak doğrudan matematik kitaplarından yararlanabilir duruma gelmesine yardım etmektir. Kitap, dokuz bölümden ibarettir. Ele alınan konuları daha iyi ve kolay benimsemek için her bölüm sonunda çeşitli düzeylerde çözülmüş örnekler, alıştırmalar ve çizimler verilmiştir. Her ders biriminin sonunda, ders esnasında ya da evde öğrencilerin kendi başına çalışmaları için alıştırmalar verilmiştir. Kitabın sonunda, alıştırmaların çözümleri, bazılarının ise çözümü için tavsiyeler verilmiştir.

Birinci bölüm "**Basit faiz hesabı**" başlığı altında verilmiştir. Burada amaç: öğrenci, basit faiz hesabını öğrenmeyi ve aynısını pratikte uygulanmayı; vadeli hesap, iskonto hesabı ve yatırım hesabını benimsemek, aynı zamanda kredi hesabı ve bireysel işlem hesabı kavramlarını öğrenmektir.

İkinci bölüm "**Kıymetli metaller paralar ve dövizler**" başlığı altında verilmiştir. Bu konunun içeriğini öğrenmekle, kıymetli metaller hakkında bilgilerin genişletilmesini, onların arılık derecesinin nasıl hesaplandığını ve hesaplama tekniklerini öğrenmeye olanak sağlamaktadır. Bundan başka para ve dövizler hakkında geniş bilgiler verilmiş, özellikle dövizlerin satın ve alımı vurgulanmıştır.

Üçüncü bölüm "**Üslü ve logaritmalı denklemler**" başlığı altında verilmiştir. Burada reel üslü kuvvet ve logaritma kavramı incelenmiştir. Amaç, bazı üslü ve logaritmalı denklemlerin çözümüne ait tekniklerin öğrenilmesidir.

"**Dar açının trigonometrik fonksiyonları**" konusu dördüncü bölümde verilmiştir. Bu bölümdeki ders malzemesinin öğrenilmesiyle, öğrenci trigonometri hakkında temel bilgiler edinecek, yani sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant temel trigonometrik fonksiyonlarını tanımlayacak ve onların geometride ve pratikte nasıl uygulandığını öğrenecektir.

Beşinci bölüm "**Düzlemde doğru**" diye adlandırılmıştır. Bu konuyu incelemekle öğrenciler düzlem analitik geometrisi hakkında temel bilgiler edinecekler. Özellikle, iki nokta arasındaki uzaklık, doğru parçasının verilen oranda bölünmesi ve formüllerinin uygulanması gösterilmiştir. Bu bölümün sonunda, iki doğru arasındaki açı ve bir noktadan verilen bir doğruya uzaklık kavramlarından ödevlerin nasıl çözüldüğünü öğreneceksiniz.

Altıncı bölümde "**Diziler**" konusu incelenmiştir. Bu konudaki malzemeyi öğrenmekle, reel sayılı diziler hakkında daha kapsamlı bilgiler edineceksiniz. Burada özellikle aritmetik ve geometrik dizilerine, onların genel terimine ve ilk n terimlerinin toplamına ait formüllere daha fazla önem verilmiştir.

"**Bileşik faiz hesabı**" adında verilmiş olan bölüm (ilerde bunu *i* /*i* kısaltmasıyla işaretleyeceğiz), öğrencinin basit faiz hesabı hakkında bilgilerini yoklamasına ve bileşik faiz kavramını öğrenmesine olanak sağlamaktadır. Dönem başı (antisipativ) ve dönem sonu (dekurziv) faizlenme kavramları incelenir ve bununla öğrenci faiz oranını, faiz miktarını ve faiz süresinin nasıl hesaplandığını öğrenecektir.

Sekizinci bölümde "**Vadeli yatırımlar ve vadeli gelirler**" kavramı incelenmiştir. Amaç, dönem başı ve dönem sonu yatırımları tanımak ve bu gibi yatırımların sonundaki değerlerini hesaplamaktır. Bu bölümde kira, kira yatırımı, iskonto ve iskonto değeri kavramlarını da öğreneceksiniz. Sonunda, bileşik faiz, yatırımlar ve kira ile ilgili daha bileşik problemler çözebileceksiniz.

Son olan dokuzuncu "**Borçlar**" bölümünde, borç, amortizasyon vadesi, taksitler, ödeme gibi kavramlar incelenmiştir. Eşit taksitli borçlar, eşit anüiteli ödemeler, yuvarlak anüiteli ve farklı türden borçlar hakkında amortizasyon planları yapılmaktadır.

Bu kitaptaki ders malzemesini gerçekleştirirken, öğretmen, öğrencilerinden kendi başlarına çalışmalarını teşvik etmelidir.

Bu kitabın kalitesinin iyileşmesi yönünde, denetleyenlerden aldığımız iyi maksatlı eleştiriler için de özellikle minnettarımız.

İlerde de, kitabın içeriğinin zenginleşmesi yönünde olumlu maksatlı her eleştiri için önceden teşekkürlerimizi sunarız. Böylece bu kitap, iktisat – hukuk bölümünde öğrenim gören öğrencilere, ilerdeki mesleklerinde yararlı olacak bilgileri öğrenmelerini sağlayacaktır.

Mayıs, 2010 Yazarlar

İÇİNDEKİLER

1 BASİT FAİZ HESABI

1.1. Basit Faizin Hesaplanması

1.1.1. Temel Kavramlar

Günlük yaşantımızda bankaya para yatırımı, bireysel hesap, tasarruf mevduatı karneleri, kredi karneleri işlemlerine pek çok rastlıyoruz. Genel olarak, maaşlar, emeklilik maaşları, biriktirdiklerimizi belli bir süre saklamak ve korumak üzere bankaya teslim edilmiş ve istediğimiz zaman alabildiğimiz paralardır. Bu sürede, teslim edilen paralardan banka yararlanır ve buna karşılık olarak banka paraların sahibine faiz hesaplıyor. Diğer taraftan çok sık vatandaşların da nakit paraya ihtiyaçları olduğunda belli bir süre için bankadan borç alıyorlar. Bunun karşılığında borç alan kişi bankaya belli bir miktar para ödüyor.

Kredi bağları, borçlu ve borç veren arasında kurulmaktadır. Aslında, bu bağıntının temeli faizdir. **Faiz**, borç alan kişinin aldığı para karşılığında borç verene ödediği bir yüzde miktarıdır, yani yararlandığı para için ödediği miktardır.

Bankadan borç (kredi) aldığımızda, banka **alacaklı**, parayı alana ise **verecekli (borçlu)** denir. Bankanın parasından yararlanan verecekli, karşılık olarak bankaya belli bir faiz ödeyecektir. Bankaya para yatırdığımız takdirde, banka kullanıcıdır ve vericiye belli bir faiz ödemektedir.

Faiz miktarı, yüzde miktarı gibi hesaplanır, yani yatırılan paranın her 100 birimi için belli bir miktardır. Fakat bildiğimiz yüzde farklıdır hesabından farklıdır, çünkü faiz miktarı sadece yüzde oranına değil, paranın bankada kaldığı süreye de bağlıdır.

Faiz hesaplamaları için en basit örnekler: tasarruf mevduatları, vatandaşların ve şirketlerin kredi kullanmaları, tüketici kredileri, banka ve kredi kartlarıdır.

Bir yatırımın, yatırım dönemi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranına **basit faiz** denir.

Faiz miktarının ve ona bağlı olan diğer büyüklüklerin hesaplanmasına **basit faiz hesabı** denir. Basit faiz hesabında genel olarak şu dört temel büyüklüğe rastlanılır:

- Ana para (kapital, temel değer) K
- faiz miktarı (yüzde payı) i
- yüzde oranı (faiz miktarı) p - zaman biriminde 100 denarın faizine eşittir.
- faizin hesaplandığı süre (zaman) t.

Faiz fiyatı, genellikle yıllık olarak gösterilir. Fakat bazı durumlarda bir yıldan küçük aralıklar için de verilebilir, mesela: yarıyıl (sömestir), üç aylık (çeyrekyıl), aylık ve benzer olabilir.

Faizin hesaplandığı süre de yıllar, aylar ya da günler ile ifade edilebilir. Anlaşma gereği bir yıl 365 gün, ayların gün sayısı ise takvime göre belirlenir; fakat hesaplamayı daha basitleştirmek için bir yıl 360 gün ve bir ay 30 gün olarak alınır.

Faizin hesaplanması dönem sonunda ya da dönem başlangıcında hesaplanabilir, fakat bununla ilgili ilerde daha ayrıntılı açıklamalar yapılacaktır.

Temel değerin faiz miktarı kadar artmasına (K + i), çok kez biriken değer terimini de kullanacağız.

1.1.2. Basit Faizin Hesaplanmasında Büyüklükler Arasındaki Temel Bağıntılar

Aşağıdaki örneklerle basit faizin hesaplanmasında temel büyüklükler arasındaki bağıntıları inceleyeceğiz.

1. Bankaya yatırılan 34 500 denar kapitalin yıllık %8 faiz oranı ile 4 yıllık faizi ne kadardır?

34 500 denar kapitalin bir yıllık faizi:

$$\frac{8}{100}\cdot 34500 = 2760 \text{ denardır.}$$

Faiz, ana paraya (temel kapitale) hesaplandığına göre, ikinci yılın faiz miktarı yine 2760 denar ve her gelecek yıl bu miktar aynı olacaktır. Buna göre, 4 yıllık faiz miktarı ilk yılın faizinin 4 katı olacaktır. O halde toplam faiz miktarı:

$$i = \frac{8}{100}\cdot 34500\cdot 4 = 11040 \quad \text{olur.} \quad \blacklozenge$$

Bu hesaplamayı genel işaretlemelerle yazarsak, bir yıllık faiz miktarı (yüzde payı)

$$i = \frac{Kp}{100}$$

olur. t yılda ise:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{100}}$$

formülü elde edilir.

Bu durumda, yıllık basit faiz şu temel orantı ile de gösterilebilir:

$$\boxed{K : i = 100 : p\cdot t}$$

Bu formülden yararlanarak, basit faiz hesabında bulunan tüm diğer büyüklükler için de formüller çıkarabiliriz.

2. Bankaya ne kadar para yatırılmalıdır ki, yıllık %5 faiz oranı ile 8 yılda 9600 denar faiz elde edilsin?

Temel büyüklükler arasındaki orantıyı göz önünde bulundurarak, ana para

$$\boxed{K = \frac{100i}{pt}}.$$

formülüyle hesaplanır.

Örneğimizde yatırılan para

$$K = \frac{100 \cdot 9600}{5 \cdot 8} = 24000 \quad \text{denardır.} \ \blacklozenge$$

Benzer şekilde faizin hesaplandığı zaman süresi ve faiz oranı için formüller yazabiliriz. Bu formülleri örnekler çözerken yazacağız.

3. 5400 denar temel kapital bankaya kaç yıl yatırılmalıdır ki, %6 faiz oranıyla 6480 denar faiz elde edilsin?

Temel orantıdan

$$\boxed{t = \frac{100i}{Kp}}.$$

formülü elde edilir. O halde

$$t = \frac{100 \cdot 6480}{54000 \cdot 6} = 2 \ \text{yıl elde edilir.}$$

4. 58000 denar alınan borç için üç yılda 8700 denar faiz ödenmişse, faiz oranını hesaplayınız.

Bilinmeyen büyüklük p faiz oranıdır. Bunu temel orantı gereğince şu formülle hesaplayabiliriz:

$$\boxed{p = \frac{100i}{Kt}}.$$

O halde:

$$p = \frac{100 \cdot 8700}{58000 \cdot 3} = 5\% \cdot \ \text{elde edilir.} \ \blacklozenge$$

Şimdiye dek incelenen örneklerde, faiz miktarının hesaplandığı zaman yıllarla gösterilmişti. Fakat genel durumda faiz hesaplama zamanı tam sayılı yıllarla ifade edilmiyor. Böyle durumlarda basit faizin hesaplanmasına ait yukarda elde edilen formüllerden yararlanmak için, günleri ve ayları yılın birer kısmı olarak göstermek en uygun olur. Bu şekilde bir ay yılın $\frac{1}{12}$ si, gün ise yılın $\frac{1}{360}$ i ya da $\frac{1}{365}$ i gibi alınacaktır. Zaman aylar ile ifade edildiği durumda, t zamanı yılın $\frac{1}{12}$ si olduğunu göz önünde bulundurarak, faiz miktarı (yüzde payı) için:

$$\boxed{i = \frac{Kp}{100} \cdot \frac{t}{12}},$$

formülü elde edilir.

Aylar ile ifade edilmiş olan t zamanı için temel orantı

$$\boxed{K : i = 1200 : pt}.$$

olur.

t zamanı günlerle ifade edildiği durumda, anlaşma gereği, yılı takvime göre 365 gün ((k,365) biçiminde işaret edilir) ya da (30, 360) zaman matrisi biçiminde eğer yılı 360 gün sayarsak. faiz miktarını

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36000}}$$

ya da

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{36500}},$$

formülüyle hesaplayacağız. Yani zaman t günlerle ifade edildiğinde , yılın $\frac{t}{365}$ ya da $\frac{t}{360}$ kısmı olacaktır. Zamanı hesaplamak için karşılık gelen temel orantı

$$\boxed{K : i = 36500 : pt}$$

ya da

$$\boxed{K : i = 36000 : pt}.$$

şeklinde yazılabilir.

Not. Günler takvime göre ve bir yılda 360 gün sayıldığı durumda da (k, 360) işaretlemesi de kullanılabilir.

5. 240 000 denar temel kapital, % 6 faiz oranıyla 8 ayda ne kadar faiz getirir?

Ödevin koşullarına göre K= 240 000, t = 8 ay, p = % 6'dır. O halde

$$i = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 8}{1200} = 9600$$ denar elde edilir.

6. Hangi faiz oranıyla 1 620 000 denar ana paradan, 60 günde 21 304 denar faiz miktarı elde edilecektir?

Verilenler: K = 1 620 000 denar, i = 21 304 ve t = 60 gün. $i = \frac{Kpt}{36500}$, formülünden

$$p = \frac{36500 \cdot i}{Kt} = \frac{36500 \cdot 21304}{1620000 \cdot 60} = 8\% . \blacklozenge$$ elde edilir.

7. 23 mayıstan 16 eylüle kadar bankaya yatırılan bir miktar para %4 faiz oranıyla 4576 denar faiz getirmiştir. Zaman takvime göre (k, 365) hesaplandığına göre yatırılan para ne kadarmış?

Önce, gün sayısını belirtirken zaman diliminin ilk günü sayılırsa son gününü sayılmayacaktır ya da ilk gün sayılmazsa vadenin son günü sayılacaktır, yani her durumda faizde kalan sürenin ilk ve son gününden sadece biri hesaplanmaktadır.

Şu örnekte, faiz hesaplamanın ilk günü 24 mayıs olarak alacağız, yani ilk günü saymıyoruz. Bu durumda mayıs ayından 8 gün, haziran 30 gün, temmuz ve ağustos ayları 31 gün ve eylül ayının son 16.cı gününü hesaba koyduğumuza göre, faizin hesaplanacağı toplam gün sayısı $t = 8 + 30 + 31 + 31 + 16 = 116$ elde edilir. Bilinmeyen büyüklük ana para K'yı hesaplamak için yukarıda verilen formülden yararlanarak

$$K = \frac{36500 \cdot i}{pt} = \frac{36500 \cdot 4576}{4 \cdot 116} = 360000$$

denar elde edilir. Demek ki, 23 mayısta yatırılan para 360 000 denardır. ♦

8. Bir tenis yarışmasında şampion, kazandığı 125 000 denarlık şampiyonluk ödülünü iki bankaya yatırmıştır. Birinci bankada faiz oranı %7, ikinci bankada ise % 5'tir. Bir yıl sonra her iki bankadan toplam 7 850 denar faiz elde edildiğine göre, her bankaya kaçar para yatırılmıştır?

Bilinen büyüklükler: K = 125 000 denar olan ana para, $K_1 = x$ ve $K_2 = 125000 - x$ olmak üzere iki ayrı yatırıma ayrılmıştır. Faiz oranları $p_1 = \%7$ ve $p_2 = \%5$, toplam faiz miktarı $i = i_1 + i_2 = 7850$ denardır. Verilen koşullara göre $t_1 = t_2 = 1$ yıl olmak üzere şu denklemi oluşturuyoruz:

$$i = \frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100},$$

Oradan

$$7850 = \frac{7x}{100} + \frac{5(125000 - x)}{100},$$

denklemi elde edilir. Denklemi çözüyoruz: 785 000 = 5. 125 000 + 2x ; x = 80 000 elde edilir. Buna göre $K_1 = x =$ 80 000 denar ve K_2 = 45 000 denar elde edilir.♦

Alıştırmalar

1. Bankaya yatırılan 25 000 denar % 15 faiz ile:

a) 5 yılda; b) üç ayda; c) (30, 360) ve (k, 365)'e göre 25 günde ne kadar faiz getirir?

2. Bir bankaya % 5 faiz oranıyla bir K kapitalı yatırılmıştır. Basit faiz hesabıyla ne kadar zamanda faiz miktarı yatırılan paraya eşit olacaktır? (Not: $K = i_p$)

3. 34 500 denar borç için 4 yılda 6 900 denar faiz hesaplandığına göre, faiz oranını belirtiniz.

4. % 6 faiz oranı ile hangi ana paradan:

a) 4 yılda; b) 8 ayda

3540 denar faiz miktarı elde edilir?

5*. Bir bankaya, aralarındaki fark 2000 denar olmak üzere iki farklı kapital yatırılmıştır. Büyük olan kısmı % 4 faiz oranıyla 1 yıl, diğeri ise %6 faiz oranıyla 8 ay için bankada kalmıştır. Her iki kısmın faiz miktarları eşit olduğuna göre, bankaya yatırılan toplam para ne kadar olduğunu hesaplayınız.

6*. Faiz oranı % 6,5 olmak üzere aynı yılda üç kapitaldan: Birincisi 38000 denar 31.01–30.06'a kadar, ikincisi ise 72600 denar 8.03–30.06'a kadar ve 18900 denar 1.05–30.06'a kadar vade ile bankaya yatırılıyor. Toplam faiz miktarını hesaplayınız.

1.2. Yüz Üstünde ve Yüz Altında Faiz Hesabı

Borçlar ve onlara ait faizlerden, yatırımlar ve mevduatların faizleri söz konusu olunca çoğu kez, basit faizin büyüklükleri arasındaki değerlere değinmeden, pratik olsun diye ana paranın faiz miktarı kadar çoğalmasına ya da hesaplanan faiz miktarı kadar ana paranın azalmasından söz edilir.

Ana paranın faiz miktarıyla beraber değeri $K + i$ bilindiğinde, **yüz üstünde faiz hesabı** söz konusu olur ve bunu K ve i büyüklüklerini belirtmek için kullanıyoruz. Diğer taraftan, ana paranın faiz miktarı kadar azalmış yani, $K - i$ olduğu durum, **yüz altında faiz hesabı** gibi ifade edilir. Burada da faiz süresini hesapladığımızda, faizin hesaplanması yıllık, aylık ya da günlük olabilir.

Basit faiz hesabı $K : i = 100 : pt$ formülüyle verilmiştir. Hesaplanan faiz miktarını $i = \frac{Kpt}{100}$ formülüyle ifade ettikten sonra, onu ana paraya ekleyerek:

$$K + i = K + \frac{Kpt}{100} = K\left(1 + \frac{pt}{100}\right).$$

elde edilir.

O halde

$$\frac{K+i}{K}=1+\frac{pt}{100}=\frac{100+pt}{100},$$

ifadesi, bu eşitlikten de

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=K:100} \qquad (1)$$

orantısı elde edilir.

Benzer şekilde, temel orantıyı $K : 100 = i : pt$ biçiminde yazarsak, basit faiz hesabında, faizle beraber toplam para ve diğer temel büyüklükler arasındaki bağıntıyı gösteren

$$\boxed{(K+i):(100+pt)=i:pt}. \qquad (2)$$

orantı elde edilir.

Benzer şekilde ana paranın azaldığı durumu incelersek:

$$K-i=K-\frac{Kpt}{100}=K\left(1-\frac{pt}{100}\right)=K\frac{100-pt}{100}.$$

elde edilir. Bunu $K : 100$ oranında yeniden değiştirmekle:

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=K:100} \qquad (3)$$

elde edilir. Bu orantıların benzerliğinden

$$\boxed{(K-i):(100-pt)=i:pt}. \qquad (4)$$

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=K:100}$$

ve

$$\boxed{(K\pm i):(100\pm pt)=i:pt}.$$

biçiminde yazılabilir.

Bu formüller, orantıların özelliklerinden yararlanarak da elde edilebilir. Buna göre, iki orantının tarafları birbiri ile toplandığında ya da biri diğerinden çıkarıldığında orantı bozulmaz, yani ilk orantının sağ ve sol tarafına eşit olur.

Elde edilen yeni orantılardan yüz üstünde ve yüz altında faiz hesabındaki ana para (kapital) ve faiz miktarının hesaplanması için formüller elde edilir:

$$\boxed{K=\frac{(K\pm i)\cdot 100}{100\pm pt}} \text{ ve } \boxed{i=\frac{(K\pm i)\cdot pt}{100\pm pt}}.$$

1. Borçlu, borç verene 2 yıl için % 6 faiz oranıyla aldığı para için faiziyle beraber 57120 denar veriyor. Borç aldığı para ne kadardır ve ne kadar faiz ödemiştir?

$K + i = 57120$ denar biliniyor. O halde, $p = \% \, 6$, $t = 2$ olduğuna göre $K=\frac{(K+i)\cdot 100}{100+pt}$, formülünden

$$K=\frac{57120\cdot 100}{100+6\cdot 2}=\frac{5712000}{112}=51000 \quad \text{denar elde edilir.}$$

Buna göre, Borcun temel kısmı 51000 denar ve bu paraya ödediği faiz miktarı 57120 – 51000 = 6120 denardır. ♦

2. Faiz oranı % 8 olmak üzere, 6 aylık faiz miktarını aldıktan sonra, banka borç alana 52800 denar para vermiştir. Temel borç ve faiz miktarı ne kadardır?

Faiz miktarı (yüzde payı) i önceden ödetilmiş olduğunu göz önüne bulundurarak, ana para faiz miktarı kadar azalmış olduğunu fark edebilirsiniz. Demek ki borçlu bankaya daha $K - i$ denar, yani aldığı para kadar bankaya ödemesi gerekir. O halde $K - i = 52800$ denar, $t = 6$ ay, $p = \%\ 8$ dir. Ana parayı hesaplamak için iki yöntem gösterebiliriz. Bunlardan biri zaman süresi yıl ile ifade edildiğinde $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, ya da yüz altında ve yüz üstünde faiz hesaplama formüllerinden yararlanarak, zamanı aylar ya da günler ile ifade ederek hesaplanabilir. Yukarıda gösterilen formülden doğrudan doğruya yararlanıyoruz:

$$K = \frac{(K-i)\cdot 100}{100 - pt} = \frac{52800\cdot 100}{100 - 8\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5280000}{96} = 55000$$

denar ve faiz miktarı

$$i = \frac{(K-i)\cdot pt}{100 - pt} = \frac{52800\cdot 8\cdot\frac{1}{2}}{100 - 8\cdot\frac{1}{2}} = \frac{211200}{96} = 2200$$

denar olduğunu buluyoruz (ya da $i = K - (K - ı) = 55000 - 52800 = 2200$ denar). ♦

Faiz süresi (zaman) aylarla ifade edildiği durumda, hazır orantıları da kullanabiliriz; yani $K : i = 1200 : pt$ orantısından:

$$\boxed{(K \pm i) : (1200 \pm pt) = K : 1200}$$

ve

$$\boxed{(K \pm i) : (1200 \pm pt) = i : pt}.$$

elde edilir.

$K : i = 36500 : pt$ ya da $K : i = 36000 : pt$ eşitliğinden , orantıların özelliklerini kullanarak:

$$\boxed{(K \pm i) : (36500 \pm pt) = K : 36500}$$
$$\boxed{(K \pm i) : (36500 \pm pt) = i : pt}$$

ve benzer şekilde, zaman aralığı günlerle ifade edildiğinde, zaman matrisleri (k, 365) ve (30, 360) olmak üzere

$$\boxed{(K \pm i) : (36000 \pm pt) = K : 36000}$$
$$\boxed{(K \pm i) : (36000 \pm pt) = i : pt},$$

elde edilir.

3. Bir kişi, % 11 faiz oranıyla beraber 9 ay için 541250 denar ödemiştir. Kredi miktarı ve faiz miktarı ne kadardır?

Faiz ve temel kapital toplamı $K + i$ formülüne ait $(K + i) : (1200 + pt) = K : 1200$ temel orantısından yararlanarak, zaman aylarla ifade edildiği durumda

$$K = \frac{(K+i)\cdot 1200}{1200 + pt} = \frac{541250 \cdot 1200}{1200 + 11 \cdot 9} = 500000$$

denar elde edilir. Faiz miktarı (yüzde payı) ise
$i = (K + i) - K = 541250 - 500000 = 41250$ denar elde edilir.♦

Alıştırmalar

1. Yüz üstünde faiz ve yüz altında faiz hesabı nedir? Açıklayınız.

2. 200 gün için 60 000 denar borç alan kişi, % 30 faiz miktarını çıkardıktan sonra, borcu tahsil ederken kaç para ödemesi gerekecektir? Faiz miktarı ne kadardır? Bankaya toplam ne kadar para ödenecektir? (30, 360) zaman matrisini kullanınız.

3. Bir kişi, % 20 faiz oranıyla üç aylık bir kredi için banka ile kontrat yapmıştır. Kontrata göre, banka faiz miktarını alarak kişiye 33440 denar kredi vermiştir. Kredi kontratı ne kadar para için imzalanmıştır ve hesaplanan faiz miktarı ne kadardır? (30, 360) Zaman matrisini kullanınız.

4. Bir kişiye 35000 denar 3 yıl için ve 50000 denar 5 yıl zaman için ödenmesi gerekir. Faiz oranı % 5'tir. Gereken paranın elde edilmesi için bankaya ne kadar para yatırılmalıdır?

5*. % 3,2 faizle beraber 10.08 – 30.09 zaman aralığı süresi için; (30, 360), borçlu 33900 denar borç ödemiştir. Borç ve faiz miktarını hesaplayınız.

6. Borçlu % 12,5 faizle beraber 2 yılda 325500 denar borç ödemiştir. Borç ve hesaplanan faiz miktarı ne kadardır?

7. Bir banka 25.01'tan 31.08 zaman aralığı için % 9 faiz miktarını aldıktan sonra müşterisine 10000 denar borç vermiştir. Zaman matrisi (*K*, 365) sayıldığına göre, borç ve hesaplanan faiz miktarı ne kadardır?

1.3. Vadeli Hesap

Bir borçlunun farklı miktarda, farklı ödeme vadeleri ve farklı faiz oranlarıyla birkaç borcu olduğu durumda, ne borçlu ne de alacaklı zararlı olmayacak şekilde borçların aynı anda ödenmesine mümkün olup olmadığı sorusu sorulabilir. Bu soruyu ancak borçların ödenmesi vadelerinin ortalaması ne kadardır, ortalama faiz oranı ne kadardır, borçların ödendiği anda borç miktarı ne kadardır soruları açısından inceleyebiliriz. Bu ise prensip olarak, ayrı ayrı para miktarların faizlerinin toplamı, borçların toplamının ortalama vadeye göre, ortalama faiz oranıyla hesaplanan faiz miktarına eşit olmalıdır demektir. Ortalama vadeyi ve ortalama faiz oranını belirtme işlemine **vadeli hesap** denir ve aslında basit faiz hesabının bir uygulanmasıdır. Birkaç borç miktarı farklı vadelerde ödenecek yerde, toplam borcu aynı anda ödenmesi için ayrılan zamana **orta vade** denir. Bazı durumlarda borçlu, aynı anda başka borçlulardan alacaklı durumunda olabilir. Böyle durumda alacak ve verecek farkını ödeme vadesine **borç kalanının (saldonun) ödeme vadesi** denir.

1.3.1. Ortalama Vade ile Hesaplama

Borçlunun tahvillerinin miktarları $K_1, K_2, \ldots, K_n$, bunlara karşılık gelen faiz oranları $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ve ödeme vadeleri $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zaman aralıkları olsun.

Formüllerde t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ zamanı herhangi bir ölçü birimine göre verilebilir, fakat bankalar genellikle günü ölçü birimi olarak alıyorlar.

Borçlu, bir orta vade t_k ve ortalama faiz oranıyla tüm borçları aynı anda ödemek istiyor. Hesaplamanın sadeleşmesi için zaman ölçüsü yıl olsun. Borçlunun tüm tahvillerinin faiz miktarları

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{100}.$$

olsun. Bu miktar her bir tahvilin ortalama faiz oranıyla ve ortalama ödeme vadesiyle hesaplanan tüm faiz miktarların toplamına

$$\frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + \ldots + \frac{K_n p_s t_s}{100}.$$

eşit olmalıdır. Böyle durumda zararlı olan taraf yoktur, çünkü temel borçların toplamı eşit, fakat hesaplanan faiz miktarları da eşittir.

Demek ki,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{100} + \frac{K_2 p_2 t_2}{100} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{100} = \frac{K_1 p_s t_s}{100} + \frac{K_2 p_s t_s}{100} + \ldots + \frac{K_n p_s t_s}{100},$$

elde edilir, oradan da

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = p_s t_s (K_1 + K_2 + \ldots + K_n).$$

olduğunu yazabiliriz. Buradan, ortalama faiz oranı bilindiği takdirde, borcun ortalama ödeme vadesini hesaplayabiliriz, yani tüm borcun ödeme vadesini

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{p_s (K_1 + K_2 + \ldots + K_n)}}.$$

elde etmiş oluyoruz.

Borç miktarları, faiz oranları ve ödeme vadeleri farklı olduğu durumlarda ortalama faiz oranına ait şu formülü uygulayacağız:

$$\boxed{p_s = \frac{K_1p_1t_1 + K_2p_2t_2 + \ldots + K_np_nt_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}}.$$

Ödeme vadeleri eşit olduğu durumda, ayrı ayrı tüm borçların faiz miktarını inceleyelim. Bu nedenle, önceki formülde

$$t_1 = t_2 = \ldots\ t_n = t_s$$

yazarak şu formülü elde edeceğiz:

$$\boxed{p_s = \frac{K_1p_1 + K_2p_2 + \ldots + K_np_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}}.$$

Hesaplanan ortalama faiz oranını, ortalama ödeme vadesi formülünde değiştirelim:

$$t_s = \frac{K_1p_1t_1 + K_2p_2t_2 + \ldots + K_np_nt_n}{\dfrac{K_1p_1 + K_2p_2 + \ldots + K_np_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n}\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)},$$

oradan da

$$\boxed{t_s = \frac{K_1p_1t_1 + K_2p_2t_2 + \ldots + K_np_nt_n}{K_1p_1 + K_2p_2 + \ldots + K_np_n}}.$$

formülü elde edilir.

Hesaplamalarda çok kez bazı büyüklükler birbirine eşit olabilir. Örnek:

- Temel miktarlar $K_1 = K_2 = \ldots\ K_n = K$ olduğu durumda, ortalama vade ve ortalama faiz oranı için:

$$t_s = \frac{K\left(p_1t_1 + p_2t_2 + \ldots + p_nt_n\right)}{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)} = \frac{p_1t_1 + p_2t_2 + \ldots + p_nt_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

ve

$$p_s = \frac{K\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_n\right)}{nK} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n};$$

formülleri elde edilir.

- Faiz oranları birbirine eşit $p_1 = p_2 = \ldots\ p_n = p$ olduğunda, ortalama ödeme vadesi için

$$t_s = \frac{p\left(K_1t_1 + K_2t_2 + \ldots + K_nt_n\right)}{p\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)} = \frac{K_1t_1 + K_2t_2 + \ldots + K_nt_n}{K_1 + K_2 + \ldots + K_n},$$

formülü elde edilir; ortalama faiz oranı ise $p_s = p$ dir.

- Hem temel miktarlar hem faiz oranları birbirine eşit oldukları durumda ise $p_s = p$ ve

$$t_s = \frac{K\left(t_1 + t_2 + \ldots + t_n\right)}{nK} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}{n}.$$ dir.

Ödeme vadesini (ödeme tarihini) belirtmek için, genellikle birinci ödeme tarihine hesaplanan ortalama vade tarihi eklenir. Bu durumda, borcun tahsilinde tüm vadelerin hesaplanması, ilk ödeme vadesine göre karşılaştırılarak yapılır.

Zaman, günlerle ifade edildiği durumda, ayrı ayrı faiz miktarların toplamının ve ortalama vadeyle hesaplanan faiz miktarların denklemi

$$\frac{K_1p_1t_1}{36500}+\frac{K_2p_2t_2}{36500}+...+\frac{K_np_nt_n}{36500}=\frac{K_1p_st_s}{36500}+\frac{K_2p_st_s}{36500}+...+\frac{K_np_st_s}{36500},$$

şekline dönüşür. O halde yine

$$K_1p_1t_1+K_2p_2t_2+...+K_np_nt_n=p_st_s(K_1+K_2+...+K_n).$$

eşitliği elde edilir. Buna göre, zaman birimi ister yıl, ister ay, ister gün olarak alındığında hesaplamalar aynı formüllerle yapılır, fakat ödeme vadeleri daima aynı ölçü biriminde olmalıdır.

1. Bir borçlu 30000 denar parayı dört eşit taksitle ödemelidir. Ödeme vadeleri: ilki 30 gün sonra, ikincisi 60 gün, üçüncüsü 90 gün ve son taksit 120 gün sonra ödeyecektir. Faiz oranı % 8 olduğuna göre, tüm borcu birden kaç gün sonra ödeyebilir?

Borcun ödenmesi eşit taksitlerle olduğuna göre, K_1, K_2, K_3 *ve* K_4 birbirine eşittir; faiz oranı her taksit için eşit yani p = %8 ve taksitlerin ödeme vadesi $t_1 = 30$, $t_2 = 60$, $t_3 = 90$ ve $t_4 = 120$'dir. Bu özel durum için ortalama vadeyi hesaplayacağız:

$$t_s=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}=\frac{30+60+90+120}{4}=75$$

gün elde edilir. Buna göre, 30000 denar borç % 8 faiz ile 75 gün sonra ödenebilir. ♦

Vadeli hesapta, faizin hesaplanmasına başlanıldığı tarihe **faiz dönemi** denir. Faiz döneminin ilk taksitten başlaması mecburi değildir. Faiz hesaplamaları iki farklı dönemde yapılacak bir örnek inceleyelim.

2. Borçlu, 60000 denar borcunu % 16 faiz oranıyla 4 eşit taksitle şu tarihlerde ödemelidir: Birinci taksit 15. 02, ikincisi 7. 03, üçüncüsü 5. 04 ve dördüncüsü 1. 05.

a) dönem: 15. 02; b) dönem 7. 03

olduğuna göre, hangi tarihte borçlu tüm borcu ödeyebilir?

Faiz dönemi 15.02 tarihinde başlandığı durumda ((a) şıkkı), birinci taksitin faizdeki zamanı $t_1 = 0$'dır. İkinci taksitin faizdeki zamanı 15.02'den 7.03'e kadardır (15. 02 yi saymıyoruz fakat 7. 03 zamana aittir), yani $t_2 = 20$ gündür. Benzer şekilde $t_3 = 49$ gün (şubat ayının 13 günü, mart 31 gün ve nisanın 5 günü) ve $t_4 = 75$ gün (15. 02 den 1.05 e kadar). Temel miktarlar ve faiz oranları eşit olduklarına göre, orta vade için:

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{0 + 20 + 49 + 75}{4} = 36$$

gün olduğunu buluyoruz. Demek ki, faiz hesaplanmasının başlangıcından 36 gün sonra borcun tümü ödenebilir, yani 15.02'den sayıldığına göre 23.03 tarihinde borç ödenebilir.

Faiz dönemi olarak 7.03 tarihi alınırsa (b- şıkkı), ilk taksitin faiz zamanını 7.03 'ten 15. 02'ye kadar geriye doğru sayıyoruz, yani şimdi $t_2 = 0$, $t_1 = - 20$ olur. Ondan sonra $t_3 = 29$ (7.03 ten 5.04'e kadar) ve $t_4 = 55$ (7.03'ten 1.05'e kadar). Buna göre, orta vade

$$t_s = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = \frac{-20 + 0 + 29 + 55}{4} = 16$$

gün olduğunu buluyoruz. Bu ise 23.03 tarihini borcun ödenebildiğini göstermektedir♦

Görüldüğü gibi, faiz dönemleri farklı ve farklı orta vadelere rağmen borç ödeme tarihi değişmez.

3. Bir ticaret şirketi dört eşit taksitle 100 000 denar parayı aşağıdaki vadelerde ödemesi gerekir:

- birinci taksit bu günden sayarak % 3 faiz oranıyla 100 günde;
- ikinci taksit % 4 faiz oranıyla 150 günde;
- üçüncü 25000 denarı % 6 faiz ile 200 günde;
- dördüncüsünü % 7 faiz ile 300 günde.

Kaç gün sonra ve hangi faiz oranıyla, taraflardan hiçbiri zararda olmama koşuluyla dört taksit birden ödenebilir?

Ödevi en kolay çözmek için verilen değerleri tablo halinde gösterelim. Böyle durumlarda taksitlerin toplamları da daha kolay yapılabilir.

	K_i - taksit	t_i - gün	p_i –faiz	$P_i \cdot t_t$
1	25000	100	3	300
2	25000	150	4	600
3	25000	200	6	1200
4	25000	300	7	2100
Toplam	100000		20	4200

Ortalama faiz oranı $p_s = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = \frac{3 + 4 + 6 + 7}{4} = 15\%$ ve

$$t_s = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_4 t_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{300 + 600 + 1200 + 2100}{20} = \frac{4200}{20} = 210$$

gün elde edilir. Demek ki, 100 000 denar toplam borç, % 5 faiz oranıyla tam 210 gün vadeyle ödenecektir. Buna göre ticaret şirketi

$$100000 + \frac{100000 \cdot 5 \cdot 210}{36000} = 102917$$ denar borç ödemiştir.

4. Bir tüccar aynı bankadan farklı koşullarla üç kredi almıştır. Borcun ödenmesi şu şekilde yapılacaktır:

- 7. 05 tarihinde % 4 faiz oranıyla 20000 denar ;
- 6. 06 tarihinde % 5 faiz oranıyla 40000 denar ;
- 5. 08 tarihinde % 6 faiz oranıyla 50000 denar .

Hangi tarihte ve hangi faiz oranıyla tüccar, zararlı olmadan üç taksiti birden ödeyebilir?

Başlangıç tarihi 7.05 olarak seçersek $t_1 = 0$, $t_2 = 30$ gün (7.05'ten 6.06'ye kadar), $t_3 = 90$ gün (7.05'ten 5.08'e kadar). Verileri tabloda yazdıktan sonra, orta vade formülünde bulunan çarpımları da hesaplıyoruz.

	K_i - taksit	t_i - gün	p_i –faiz	$K_i p_i$	$K_i p_i t_i$
1	20000	0	4	80000	
2	40000	30	5	200000	6000000
3	50000	90	6	300000	27000000
Toplam	110000			580000	33000000

Buna göre $p_s = \dfrac{K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3}{K_1 + K_2 + .K_3} = \dfrac{580000}{110000} = 5{,}27\%$ ve

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + K_3 p_3 t_3}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3} = \frac{33000000}{580000} \approx 57$$

gün elde edilir. Demek ki, toplam borç birden % 5,7 faiz oranıyla 57 günde, daha doğrusu 3. 07 tarihinde ödenebilir. ♦

Alıştırmalar

1. Vadeli hesap nedir?
2. Hangi zamana ortalama vade denir?
3. Hangi vadeye borcun kalan (saldo) vadesi denir?
4. Bir şirket elektrik borcunu % 9 faiz oranıyla 80 000'er denar olmak üzere beş eşit taksitle ödemek için anlaşma yapmıştır. Ödeme vadeleri: Birinci taksit 30 gün sonra, ikincisi 50 gün, üçüncüsü 80 gün, dördüncüsü 100 gün ve beşinci taksit 115 gün sonra ödenecektir. Tüm borç birden hangi aralıkta ödenebilir?

5. Borçlu 300 000 denar borcunun % 25'ni hemen, iki ay sonra % 10'nu, yedi ay sonra %35'ni ve kalan % 30'nu on ay sonra ödemelidir. Ne kadar zaman sonra tüm borç birden ödenebilir?

6. 1800000 denar borç % 20 faiz oranıyla dört eşit taksitle ödenmelidir. Ödeme vadeleri:
- birinci taksit 15. 03 günü;
- ikinci taksit 21. 04;
- üçüncü taksit 10. 05;
- dördüncü taksit 30.06.

Faiz hesaplama başlangıcı
a) 15. 03 ;   b) 21. 04
olduğuna göre, hangi tarihte borcun tümü birden ödenebilir?

7. Tüccar, satın aldığı mallar için üç ödeme yapması gerekir:
- % 6 faiz oranıyla 3. 04 tarihinde 60 000 denar;
- % 6 faiz oranıyla 24. 04 tarihinde 80 000 denar;
- % 6 faiz oranıyla 26. 05 tarihinde 100 000 denar;

Her iki taraf zararlı olmamak koşuluyla, tüccar hangi tarihte borcun tümünü birden ödeyebilir?

8. Borçlu, faiz oranı % 10 olmak üzere 3. 03 tarihinde 80 000 denar, 8. 04'te 30000 denar, 18. 05'te 60000 denar, 23. 07'de 30000 denar borç ödemelidir. Borcun tümü hangi tarihte ödenebilir?

9. Tüccar aldığı malların faturalarını % 6 faiz oranıyla, 45000 er denar olmak üzere 10.04 , 28.04., 20.05 ve 30.05 tarihlerinde ödemelidir. Tüccar, hangi gün borcun tümünü birden ödeyebilir?

1.4. Borç Kalanının Vade Hesaplanması

Bu bölümde, borçlu aynı zamanda hem alıcı hem verici olduğu durumlarda, tüm yükümlülüklerini nasıl yerine getirebilecek sorusuna cevap vereceğiz. Bu gibi zaman vadesine, borç kalanının vadesi denir.

$K_1, K_2, \dots K_n$ borç miktarları, vadeleri $t_1 = t_2 = \dots t_n = t_n$ günler ve $p_1 = p_2 = \dots p_n = p_n$ karşılıklı olarak faiz oranları olsun. Aynı kişinin alacakları $P_1, P_2, \dots P_n$, vadeleri $t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0$ günler ve $p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ faiz oranları olsun. Amaç, borçların faizlerinin toplamı, alacakların ve kalanın faizlerinin toplamına eşit olduğunu bildiğimize göre, kalanın vadesi t_s , faiz oranı (ortalama) p_s , ve borcun kalanı S büyüklüklerini belirtmektir. Bu durumda borçların toplamı alacakların toplamından büyük $K_1 + K_2 + \ldots + K_n > P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ olduğunda, borcun kalanı, borcun kapatılması için ödenecek para miktarıdır, yani

$$\boxed{S = (K_1 + K_2 + \ldots + K_n) - (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)}.$$

Borçların faizlerinin toplamı

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500}.\ \text{dir.}$$

Alacakların faizlerinin toplamı

$$\frac{P_1 p_1{}^0 t_1{}^0}{36500} + \frac{P_2 p_2{}^0 t_2{}^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m{}^0 t_m{}^0}{36500},$$

dir. Borç kalanına hesaplanan faiz $\frac{S p_s t_s}{36500}$. dir.

O halde,

$$\frac{K_1 p_1 t_1}{36500} + \frac{K_2 p_2 t_2}{36500} + \ldots + \frac{K_n p_n t_n}{36500} = \frac{P_1 p_1{}^0 t_1{}^0}{36500} + \frac{P_2 p_2{}^0 t_2{}^0}{36500} + \ldots + \frac{P_m p_m{}^0 t_m{}^0}{36500} + \frac{S p_s t_s}{36500}.$$

yazılabilir. Zaman hangi ölçü birimiyle verilmiş olursa olsun, kalan (saldo) vadesini belirtmeye yarayan denklem

$$K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n = P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + \ldots + P_m p_m{}^0 t_m{}^0 + S p_s t_s,$$

şeklinde yazılır. Oradan da

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + \ldots + P_m p_m{}^0 t_m{}^0\right)}{S p_s}.$$ elde edilir.

Özel olarak, faiz oranları birbirine eşit olduğu durumda, hem borçlar hem de alacaklar için $p_1 = \ldots = p_n = p_1{}^0 = \ldots = p_m{}^0 = p_s$, ve

$$t_s = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_n t_n - \left(P_1 t_1{}^0 + P_2 t_2{}^0 + \ldots + P_m t_m{}^0\right)}{S}.$$ elde edilir.

1. "Polarino" firmasının borçları: 5000 denar 40 gün, 6000 denar 50 gün, 8000 denar 80 gün vadeli ve alacakları: 3000 denar 30 gün ve 10000 denar 90 gün vadeli. Borcun kalan kısmını kaç gün sonra ödemelidir? Faiz oranı her vade için eşittir.

Borç ödemede orta vadenin belirtilmesinde yapıldığı gibi, benzer şekilde borçlar ve alacaklarda da verileri, tabloda yazacağız.

Borçlar				Alacaklar			
	K_i	t_t	$K_i t_i$		P_J	t_j^0.	$P_j t_j^0$
1	5000	40	200000	1	3000	30	90000
2	6000	50	300000	2	10000	90	900000
3	8000	80	640000				
Toplam	19000		1140000		13000		990000

Borcun kalanı

$$S = (K_1 + K_2 + K_3) - (P_1 + P_2) = 19000 - 13000 = 6000$$

denardır. Kalanın vadesi

$$t_s = \frac{K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 - \left(P_1t_1^{\,0} + P_2t_2^{\,0}\right)}{S} = \frac{1140000 - 990000}{6000} = 25$$

gün elde edilir. Demek ki, aynı faiz oranıyla, bu günden sayarak 25 gün vadeyle 6000 denar ödemekle borcun tümü ödenmiş olacaktır. ♦

Not. Şimdiye dek borçların toplamı alacaklardan büyük olduğunu farz etmiştik. Halbuki, alacakların toplamı da vereceklerden büyük olabilir durumlar da vardır. Bu durumda borç kalanını ifade eden eşitliklerde negatif işaretli olacaktır. Bu miktarlar borçluya hesaplanan faiziyle kalacaktır.

Alıştırmalar

1. Borç kalanının vadesi kavramı nedir?

2. Bir şirket, üç aylık vadeli 75000 denar, altı ay vadeli 40000 denar ve sekiz ay vadeli 80000 denar borçludur. Aynı zamanda, yedi ay vadeli 55000 denar ve dokuz ay vadeli 30000 denar alacaklıdır. Hangi vadede tüm borcu ödeyebilir?

3. Bir şirketin, 5.04 tarihli 80000 denar, 20.05 tarihli 150000 denar ve 30.06 tarihli 275000 denar borçları vardır. Aynı zamanda 17.03 tarihli 130000 denar ve 5.08 tarihli 90000 denar alacakları vardır. Faiz dönemi 5.04 tarihi olduğuna göre, borç kalanını hangi tarihte ödeyebilir?

4. Borçlu, 4.03 tarihli 1000 denar, 25.04 tarihli 2000 denar ve 15.05 tarihli 3000 denar borç ödemelidir. Aynı zamanda 17.04 tarihli 1500 denar ve 1.09 tarihli 1000 denar alacakları vardır. Borcun kalanı hangi tarihte ödenebilir? Borçlunun borç verene toplam ne kadar para vermesi gerekir?

a) faiz dönemi 4.03; b) faiz dönemi 17.02.

5. Tüccar aldığı malların borçlarını % 6 faiz oranıyla, 45000'er denar olmak üzere 10.04 , 28.04 , 20.05 ve 30.05 tarihlerinde ödemelidir. Aynı zamanda tüccarın 30000'er denar olmak üzere 15.04 ve 25.05 tarihli alacakları da vardır. Tüccar, hangi gün borcun kalanını birden ödeyebilir?

1.5. İskonto Hesabı ve İskonto Hesaplama Kavramı

Muhasebe işlerinde, bazı durumlarda çeşitli finansal kaynaklardan elde edilmiş (çek, senet, bono vb.) belli bir miktar parayı belli bir zamanda almalıdır. Henüz vadeleri yetişmemiş alacakların satışı durumunda, satış gününden alacakların vadesinin olduğu güne kadar faiz miktarının alacaktan eksilmesine **iskonto (eskont)** denir.

Belli bir tarihte ödenmesi gereken borcu, vadesi gelmeden belli bir tarihte ödemeye dönüştürme işlemine (şimdiki değeri, ilerdeki borcun değerine dönüştürülmesine) iskontolama (eskontolama) denir.

İskonto hesaplamaların yapılmasında şu parametrelerden yararlanılır:

N=	Finansal varlığın nominal değeri
t,n,n=	İskonto vadesi, varlığın indirilme gününden tahsilat gününe kadar günler sayısı *t*, aylar sayısı *m*, yıl sayısı *n*. Ayların günleri takvime göre alınır, öyle ki varlığın indirilmesi yapıldığı gün sayılmıyor, varlığın tahsil edildiği gün sayılır.
D =	İndirim (iskonto), finansal varlığın nominal değerinin azalmasına eşittir.
p =	İndirimin hesaplanmış olduğu faiz oranı (iskonto oranı) .
E =	Nominal borcun erken ödeme anında reel (efektif) miktar.

İndirimin hesaplanması iki şekilde yapıldığına göre, iki tür indirim vardır:

- Ticari (banka, ticari) indirim – *Dk*, burada indirimin hesaplandığı temel değer, nominal değerdir, efektif değer ise nominal değer ve indirimin farkıdır ve

- Rasyonel (matematiksel) indirim – *Dr*, burada nominal değer, efektif değer ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır.

İndirim yaparken, nominal değer tabanına göre banka belli bir komisyon ücreti ve diğer harcamaları hesaplıyor ve ek olarak ödetiyor (komisyon ve diğer masraflar hesaplanan efektif değerden çıkarılıyor).

1.5.1. Poliçenin Özellikleri

Poliçe, belirli bir kişi emrine, diğer bir kişiye verilen ödeme yetkisini kapsayan bir senettir. Poliçede üç taraflı ilişkiyi düzenleyen bir senettir. Senedi düzenleyen keşideci, bir kişiye borçlu iken diğerinden alacaklıdır. Keşideci alacaklı olduğu kişiye hitaben düzenlediği senedi borçlu olduğu kişiye teslim eder. Yani, poliçe; belli miktar paranın hamile ödenmesi hususunda kayıtsız şartsız havale emrini taşıyan özel şekil şartlarına tabi kıymetli evrak vasfında, soyut nitelikte bir alacak senedidir. Poliçeyi veren (keşideci), diğer bir kişiye, poliçede adı geçen kişiye (hamil) belli miktarda koşulsuz ödeme emrini vermektedir:

- keşideci (drawee), poliçeyi düzenleyen, siparişçi ya da poliçeyi yayınlayan (poliçeyi verenler bankalar ve seyahat acentalarıdır); değerli kâğıtları düzenleyen ve ödemekle yükümlü olan kişi;

- poliçeyi ödeyecek olan (muhataf);

- poliçe bedelini tahsil edecek (lehdar veya poliçe hamili), bireysel ya da tüzel kişidir ve poliçede adı yazılıdır, yani poliçeden yararlanan kişidir; ve

- poliçenin sahibi, kanun kurallarına göre poliçesi olan kişi.

Değerli kağıt olarak poliçenin şu rolleri vardır:

- poliçe kredi aracıdır;

- poliçe ödeme aracıdır;

- poliçe iskonto aracıdır;

Poliçenin nitelikleri ve rolüne göre birçok çeşit poliçe vardır: hamil poliçe, şahsi poliçe, açık poliçe, mal varlığı poliçesi, iş poliçesi, dairesel poliçe, hamil – çekilişli poliçe, şahsi – çekilişli, komisyon poliçesi ve kredi poliçesi.

Poliçenin temel çeşitleri hamil ve şahsi poliçelerdir. Poliçe; belli miktar paranın hamile ödenmesi hususunda kayıtsız şartsız havale emrini taşıyan özel şekil şartlarına tabi kıymetli evrak vasfında, soyut nitelikte bir alacak senedi olduğundan **hamil poliçeyi** nitelendiren bazı elemanları içerir. Poliçe kanunu ve 1930 yılı Cenevre anlaşması gereğince hamil poliçe üzerinde eksiksiz olarak bulunması gereken unsurlar aşağıdadır:

- gereken yerde Makedon dilinde ve Kiril alfabesiyle poliçe kelimesi yazılmış olması;
- ödeyecek olanın adı;
- keşideci adı, ya da adresi
- kime ve kimin emrine ödeneceği – lehdar.
- tanzim (düzenleme) yeri ve tarihi.
- belli bir paranın kayıtsız şartsız ödenmesi için havale.
- ödeme yeri.
- poliçenin yazılma tarihi ve yeri;
- ödeyecek olanın imzası.

Şahsi poliçede yazılı olan para miktarını kayıtsız şartsız ödeyeceğine dair verilen sözdür. Şahsi poliçe şu unsurları içerir:

- gereken yerde Makedon dilinde ve Kiril alfabesiyle poliçe kelimesi yazılmış olması;
- para miktarını kayıtsız şartsız ödeyeceğine dair vaat vermesi;
- havale tarihi;
- ödeme yeri;
- alacaklının adı;
- poliçenin yazılma tarihi ve yeri ve
- ödeyen kişinin imzası.

Poliçe işlemleri, hukuk işlemleridir ve poliçe hakkında şu işlemler yapılabilir: poliçenin verilmesi, poliçenin onaylanması, poliçenin vurgulanması, poliçenin devredilmesi, poliçenin havale edilmesi, poliçenin satın alınması, amortisman, geriye çevrilmesi, poliçenin protesto edilmesi vb.

Poliçe hukuk işlemlerinde karakteristik kurallar genellikle şunlardır: okur yazarlık, inkorporasyon, birleşme (şirketleşme), poliçe sorumluluğun kesinliği, poliçe titizliği, ve poliçe bedelini doğrudan doğruya tahsil etmedir.

Okur yazarlılık (formalite). Poliçe - hukuk durumun varlığı ve poliçe – hukuk işlemlerinin daha kolay yapılması için, poliçenin kanunla belirlenmiş kesin şekilde yazılmalıdır. Poliçe içinde şu elemanlar ve hukuk işlemleri olması mecburidir. Örnek, kabul beyannamesi, havale, cirant (kefil) beyanı vb. Son zamanlarda, hukuk işlemlerinde ve poliçe hukukundaki yeni hükümlerde, özellikle açık poliçelerin yayın teorisiyle, formalite hususu daha gevşek hal aldığını da vurgulamamız gerekir.

İnkorporasyon ilkesi, poliçe hakkında yetki ve yükümlülük, poliçe kağıdının sahip olunmasıyla sıkı bağıntıdadır. Poliçeye sahip olmayan hiç kimse, poliçeyi tahsil edemez. İnkorporasyon ilkesi, aynı zamanda iki hak (poliçeden elde edilen hak ve poliçeye sahip olma hakkı) içerir:

- poliçeden elde edilen hak – kendi karakterine göre bağlayıcı haktır ve poliçenin sahibi poliçeyi ödeyecek olandan (muhataptan), poliçe hakların tahsilini isteme hakkı vardır ve

- poliçeye sahip olma hakkı – kendi karakterine göre poliçe sahibi, poliçenin kanuni sahibi olarak, ancak poliçe varlığı durumda, poliçeyi ödeyecek olandan borcun tahsilini arama hakkı vardır.

Poliçe sorumluluğun kesinliği, poliçede sadece yazılanların tahsili istenilebilir. Bunlar poliçede açık olarak yazılıdır. Poliçe yükümlülüğü, poliçede yazılanlardan anlaşılır; burada diğer deliller kabul edilemez. Yükümlülük, poliçenin imza edilmesiyle yazılı ifade verilmesiyle başlar.

Poliçe titizliğiyle, poliçe – hukuk işlemlerinin hızlı ve sorunsuz yapılması sağlanmaktadır. Poliçe, alacaklıyı koruyan en uygun araçtır ve alacaklılara karşı kesin belgedir. Bu anlamda alacaklıya güven sağlayan kesin hukuk kurallarıyla poliçenin yükümlülükleri yerine getirilir.

Dayanışma kuralı, poliçe borçlularından - poliçeyi imzalayanlardan her biri (keşideci, muhatap, lehdar, alıcı), aralarındaki duruma bakmadan poliçe sahibine yükümlülüklerini dayanışma ile yerine getiriyorlar.

Poliçe bedelini doğrudan doğruya tahsil kuralı, poliçe borçlularından her biri (poliçeyi imzalayanlar), poliçe sahibine doğrudan doğruya sorumludurlar. Bu nedenle alıcı, poliçeyi imzalayanlardan, sırasına bakmadan her birinden doğrudan doğruya poliçe miktarını tahsilini isteyebilir.

Poliçe bağımsızlığı kuralı, her poliçe borçlusu, poliçede usulüne uygun bir şekilde kendi imzasını koyduktan sonra, poliçeyi imzalayan diğer poliçe yükümlülerine bağlı olmadan, poliçe yükümlülüğüne girer.

1.5.2. Poliçenin İskontosu

Poliçede yazılı olan para miktarına, poliçenin nominal değeri ya da poliçe miktarı denir. Poliçenin ödenmesi:

- poliçede belirlenen vade gününde;

- poliçenin vade gününden sonra ve bu durumda nominal değerden başka karşılık gelen faiz de ödenir ve

- poliçede vadesi belirlenen günden evvel (vadeden evvel poliçenin satışı) olabilir.

Poliçenin iskontu bir finans işlemidir.Vadeli satış yapan işletme, elinde bulunan senedi vade tarihine kadar bekleterek borçlusundan tahsil eder, ya da vade tarihinden önce bir finansman kurumuna giderek poliçeyi paraya çevirebilir. Bu işleme poliçe kırdırma ya da poliçe iskontosu denir. Poliçe iskontosu aslında vade tarihinden önce poliçenin satışı ya da satın alışıdır. Bu durumda satın alan kişi poliçenin iskonto gününden vadesi doluncaya kadar günlere karşılık gelen faiz tutarı kadar poliçenin nominal değerinden eskitir. Genellikle paraya ihtiyacı olan işletmelerin sattıkları mal ya da yaptıkları hizmetler karşılığında ellerindeki poliçeleri bankaya götürüp iskonto yapıyorlar. Bir işletme kuruluşu bir günde birkaç poliçenin iskontosu yapılırsa, poliçelerin şartnamesi de sunulur.

Poliçenin tahsili, vade gününden sonra yapılırsa, vadeden sonraki günlere karşılık gelen faiz miktarı, poliçenin nominal değerine katılır.

Bu faizin hesaplandığı faiz oranı, iskonto oranıdır ve elde edilen faiz miktarı iskonto miktarıdır, iskontolanmanın yapıldığı hesaba ise iskonto hesabı denir.

Poliçenin iskontosu - İskontonun hesaplanması için birçok yöntem vardır: Ticari iskonto en basit şekilde şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

Rasyonel iskontoyu ise şu formülle hesaplayabiliriz:

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}}$$

Bankalar iskontolamayı, banka diskontundan yararlanarak yapıyorlar ve poliçe sahibinin elde edeceği efektif miktarı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)}$$

1. Nominal değeri $1 000 olan bir poliçe bankaya 10.09.2009 tarihinde verilmiştir. İskonto oranı %7 ve ödeme vadesi 30.09.2009'dur. Verilen parametrelere göre, ticari ve rasyonel iskonto ve onlar arasındaki fark hesaplansın.

$N = 1000\$$
$t = 20$ gün
$p = 7\%$

$$\text{Dk} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100} = \$3{,}89 \qquad \text{Dr} = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 20}{360 \cdot 100 + 7 \cdot 20} = \$3{,}87$$

$\text{Dk - Dr} = \$\,3{,}89 - \$\,3{,}87 = \$\,0{,}02$ ♦

2. İşadamı X, bir taşıma aracının satışında elde ettiği bir poliçe sahibidir. Poliçenin değeri $100 000 ve ödeme vadesi 01.10.2009 günüdür. Halbuki işadamının paraya ihtiyacı olduğundan 06.09.2009 günü poliçeyi iskonto etmek üzere bir bankaya %8 faiz oranıyla götürüyor. Bu hizmetin karşılığı olarak banka %5 komisyon ve manipülatif masraflar adında daha $100 ödetiyor.

$N = \$\ 100\,000$
$p = \%\ 8$
$t = 25$ gün

Efektif para miktarının hesaplanması:

$$\text{E} = \text{N} \cdot (1 - \frac{\text{p} \cdot \text{t}}{360 \cdot 100)}) = \$100000 \cdot (1 - \frac{8 \cdot 25}{360 \cdot 100}) = \$99444{,}44$$

Efektif para miktarına göre iskonto:

$D = 100\,000\$ - 99\,444{,}44\$ = 555{,}56\$$

elde edilir, ya da ticari iskonto formülüyle hesaplandığında

$$\text{Dk} = \frac{\text{N} \cdot \text{t} \cdot \text{p}}{360 \cdot 100} = \frac{100000 \cdot 8 \cdot 25}{36000} = \$555{,}56$$

elde edilir. İskonto hizmeti için komisyon miktarı

$$\$99444{,}44 \frac{0{,}5}{100} = \$497.$$ elde edilir.

Buna (100$) manipülatif harcamaları katmakla, işadamının alacağı efektif para miktarı

99 444,44$ - 497$ - 100$ = 98 847,44$. elde edilir. ♦

3. A şirketi 01.05.2009 günü, eşit nominal değerleri $ 20 000 olan farklı ödeme vadeli üç poliçe bankaya kırdırmak üzere götürüyor. 01.05 günü %6 faiz oranıyla, %1 komisyon ve $20 manipülatif masrafları nominal değerden düşürerek, kırılan poliçe için banka ne kadar ödemiştir?

Poliçe 01.05.2010 günü kırılmıştır.

	Para tutarı (N)	Ödeme tarihi	Günler	*Dk*
Poliçe A	20 000 $	01.04.2009	30	100 $
Poliçe B	20 000 $	20.03.2009	41	137 $
Poliçe C	20 000 $	15.03.2009	46	153 $
	60 000 $			$\sum$ Dk = 390 $

p = 6 %

$\sum Dk = 390$ $

komisyon = % 1

manipülatif masraflar = $ 20

Efektif tutar = = $\sum N - \sum Dk$ = 60 000 – 390 = $ 59 610

– (komisyon = 59 610 x 0,01 = 596,1)

= 59 013,9

– (20)

= 58 993,9

İskonto yapılmış (kırılmış) farklı vadeli üç eşit poliçe için, 01.05.2010 tarihinde banka A şirketine 58.993,9 denar ödemiştir.♦

Poliçelerin satın alışı durumunda, tüm masraflar poliçenin iskontolanmış (kırılmış) tutarına katılır.

4. Bir kişi 01.05 günü nominal tutarı 50 000 denar, ödeme vadesi 16.05 olan bir A poliçesini ve nominal tutarı 70 000 denar, ödeme vadesi 31.07 olan bir B poliçesini bankaya kırdırmak üzere getiriyor. Ne banka ne de poliçe sahibi zararlı olmayacak şekilde, banka her iki poliçenin tutarını bir orta tarihte poliçe sahibinin hesabına yatırmalıdır. İskonto oranı her iki poliçe için %8'dir. Her iki poliçenin tutarı hangi tarihte ödenecektir ve poliçe sahibine ödenecek efektif tutar ne kadardır?

Verilen parametrelerden şunları elde ederiz:
- (A) poliçesinin nominal tutarı N_1 = 50 000 denar ve t_1 = 15 gün ve
- (B) poliçesinin nominal tutarı N_2 = 70 000 denar ve t_2 = 92 gün.

İskontonun ortalama vadesini hesaplamak için formül:

$$\boxed{t_s = \frac{\sum_{t=1}^{n} N_i t_i}{\sum_{t=1}^{n} N_i}}$$

Buna göre iskontolamanın orta vadesi = $= \frac{50000 \cdot 15 + 70000 \cdot 92}{50000 + 70000} = 60$ gün.

p = %8

$$\mathrm{Dk} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{t} \cdot \mathrm{p}}{360 \cdot 100} = \frac{(50000 + 70000) \cdot 60 \cdot 8}{36000} = 1600$$

Efektif tutar: (50 000 + 70 000) – 1 600 = 118 400 denar. ♦

Alıştırmalar

1. İskonto hesaplarında hangi parametrelerden yararlanılır?

2. Poliçe nedir ve hangi elemanlardan meydana gelir?

3. Poliçe ile işlem yapıldığında elemanlar kimdir?

4. Nominal değeri (tutarı) 2 500 denar olan bir poliçe 15.10 günü bankaya kırdırmak için getirilmiştir. İskonto oranı % 9 ve ödeme vadesi 20.11 günüdür. Verilen parametrelere göre, ticari ve rasyonel iskontoyu ve onlar arasındaki farkı hesaplayınız.

5. A şirketi sattığı malın karşılığı ödeme vadesi 01.04.2010 günü olan $ 1 200 000 nominal tutarlı poliçe almıştır. Şirketin net paraya ihtiyacı olduğundan, 15.03.2010 günü poliçeyi bankaya satmaya (kırdırmaya) kararlaştırıyorlar. İskonto oranı %7, komisyon 0,05 ve manipülatif masraflar $ 500 olduğuna göre, şirket bankadan ne kadar para almıştır?

1.6. Yatırım (Depozit) Hesapları

Banka, mevduat kabul eden, bu mevduatı en verimli şekilde çeşitli kredi işlemlerinde kullanmak amacını güden veya faaliyetlerinin esas konusu düzenli bir şekilde kredi almak ya da kredi vermek olan ekonomik bir kuruluştur. Bankaların geleneksel kaynakları, bir kredinin verilmesi için alınan depozitolar (bir alacağın karşılığı olarak alınan uzun ya da kısa vadeli depozito ve teminat niteliğindeki değerler), yatırımlardır. Bu şekilde bankalar tasarruf ve kredi fonksiyonunu gerçekleştirmekle para fonlarını etkin biçimde bir yerden diğer yere aktararak para sahiplerine (kredi vererek) ve kendi bütçesine komisyondan faiz biçiminde gelir sağlamaktadır.

Tasarruf yapmak isteyen her vatandaş kendi para depozitosunu bankaya yatırabilir. Mevduat hesabı açtıran her müşteriye bir hesap cüzdanı verilir. Hesap cüzdanı vasi altında bir kişinin adına da açılabilir. Cüzdan verilmesinin amacı, hesap sahibinin hesap seyrini, yani yatırılan paralar, alınan paralar ve mevduatların faizlerini izleyebilmesidir. Hesap cüzdanının temel unsurları şunlardır: hesap numarası, hesap sahibinin adı ve soyadı, doğum tarihi ve kimlik numarası, banka hesabı, karne numarası ve not bölümü (paraların vadesi – vadeli yoksa vadesiz) yazılır.

Hesap cüzdanı banka yetkililerince imzalanır ve mühürlenir. Her yatırılan ve çekilen paranın miktarı ve tarihi kaydedilir ve bankanın yetkilisi tarafından imzalanır ve mühürlenir.

Hesap cüzdanındaki mevduatı:

- hesap cüzdanının sahibi ve
- cüzdan sahibinin vekalet ettiği kişi, yasal temsilci ve vasi kullanabilir.

Bankaya depozitonun (nakti teminat) yatırımı bir tasarruf fonksiyonudur, bu nedenle depozitonun yatırımlarıyla ilgili bu gibi hesaplara tasarruf mevduatlar hesabı ya da yatırım hesapları denir. Tasarruf mevduatları:

- vadesiz ve vadeli (faizi çekebilme imkanıyla bir aylık, iptal etme ve etmeme vadesiyle, özel amaçlı ya da amaçsız);
- açık tasarruf mevduatlar ve
- açık çocuk denar tasarrufu olabilirler.

Kişilerin bankaya verdikleri depozito verileri, bankanın iş sırrıdır. Aynı şekilde banka, Makedonya Cumhuriyeti'nde yabancı kişiler için de hesap cüzdanı açabilir. Faiz oranları, banka tarafından belirlenir.

Mevduat sahiplerine ödenecek faiz miktarı, depozitonun vadeli yoksa vadesiz oluşuna bağlıdır. Faiz, bir miktar paranın belli bir süre kullanılması nedeniyle alınan sabit kiraya faiz denir. Kısaca, faiz paraya biçilen fiyattır. Resmi Mevduat hariç, mevduata uygulanacak faiz oranları banka ile müşteri arasında serbestçe belirlenir.

Bankalar mevduata peşin faiz veremezler. Vadesinden önce çekilen vadeli mevduata vadesiz mevduat faiz oranı uygulanır. Cari hesap olarak işleyen mevduat hesaplarının faizleri yıl sonunda ilgili mevduat hesabına tahakkuk ettirilir. Eğer hesap yıl içinde kapatılırsa faiz, hesabın kapatılma tarihinde hesaplanır ve mevduatta kalan tutar ile birlikte hesap sahibine ödenir.

Denar tasarruf mevduatları, **Tasarruf Mevduatı Sigorta Fonu** tarafından sigortalıdır. Bu fon, bireysel kişilerin 10 000 EUR karşılığında depozitolarına %100 tazminat ödemektedir. 20 000 EUR den fazla olmamak şartıyla 10 000 EUR ve 20 000 EUR arasındaki mevduatları %90 tutarında tazminat ödemekle yükümlüdür. Yukarıda adı geçen tutara, tasarruf mevduatın temel değerine faiz miktarı katılır. Faiz oranı, o dönemde Makedonya Halk Bankası'nın iskonto oranı kadar geçerli olan değerle hesaplanır.

Tasarruf mevduatlarına faiz miktarının hesaplanmasında, basit faiz hesabı formülünden yararlanılır. Basit ve bileşik faizin hesaplanmasında şu unsurlar kullanılır:

- Ana para (temel değer) – K_0 (depozito, arttırılan kapital, azaltılan kapital), faizi hesaplanması gereken tutar;
- faiz vadesi, yatırılan ya da parasal varlıklardan yararlanılan vadedir;
- faiz oranı, faiz miktarı (p ya da i) ;
- faiz tutarı, banka tarafından mevduat sahibine ödenmesi gereken sözleşme kapsamında bulunan vade için hesaplanan faiz miktarı.

Vade, yıl, ay ya da günler ile ifade edildiğinde basit faizin hesaplanması için şu formüller geçerlidir:

- bir yıl vadeli mevduat $\boxed{k = \frac{K_0 p}{100}}$ ya da n yıl için $\boxed{k = \frac{K_0 pn}{100}}$
- vade ay ile verildiğinde $\boxed{k = \frac{K_0 pm}{1200}}$

- vade günlerle ifade edildiğinde $\boxed{k = \frac{K_0 pt}{36500}}$ formülü kullanılır.

Verilen mevduatların faizini hesaplamak için, belli miktarın bankadan çekmek için ya da bankaya yeni mevzuatlar yatırmak için günlerin tayinine ait tablodan yararlanılır.

Tablo 1

Takvime göre yıl sonuna kadar gün sayısı

Gün	Ocak	Şub.	Mart	Nis.	May.	Haz.	Tem.	Ağu.	Eyl.	Ek.	Kas.	Ara.
1.	365	334	306	275	245	214	184	153	122	92	61	31
2.	364	333	305	274	244	213	183	152	121	91	60	30
3.	363	332	304	273	243	212	182	151	120	90	59	29
4.	362	331	303	272	242	211	181	150	119	89	58	28
5.	361	330	302	271	241	210	180	149	118	88	57	27
6.	360	329	301	270	240	209	179	148	117	87	56	26
7.	359	328	300	269	239	208	178	147	116	86	55	25
8.	358	327	299	268	238	207	177	146	115	85	54	24
9.	357	326	298	267	237	206	176	145	114	84	53	23
10.	356	325	297	266	236	205	175	144	113	83	52	22
11.	355	324	296	265	235	204	174	143	112	82	51	21
12.	354	323	295	264	234	203	173	142	111	81	50	20
13.	353	322	294	263	233	202	172	141	110	80	49	19
14.	352	321	293	262	232	201	171	140	109	79	48	18
15.	351	320	292	261	231	200	170	139	108	78	47	17
16.	350	319	291	260	230	199	169	138	107	77	46	16
17.	349	318	290	259	229	198	168	137	106	76	45	15
18.	348	317	289	258	228	197	167	136	105	75	44	14
19.	347	316	288	257	227	196	166	135	104	74	43	13
20.	346	315	287	256	226	195	165	134	103	73	42	12
21.	345	314	286	255	225	194	164	133	102	72	41	11
22.	344	313	285	254	224	193	163	132	101	71	40	10
23.	343	312	284	253	223	192	162	131	100	70	39	9
24.	342	311	283	252	222	191	161	130	99	69	38	8
25.	341	310	282	251	221	190	160	129	98	68	37	7
26.	340	309	281	250	220	189	159	128	97	67	36	6
27.	339	308	280	249	219	188	158	127	96	66	35	5
28.	338	307	279	248	218	187	157	126	95	65	34	4
29.	337		278	247	217	186	156	125	94	64	33	3
30.	336		277	246	216	185	155	124	93	63	32	2
31.	335		276		215		154	123		62		1

1. Bireysel kişi bankaya %9 faiz oranıyla yıllık faiz hesaplanmasıyla 10 000 denar para yatırmıştır. 5 ay sonra yatırımcının kaç parası olacaktır?

K_0 = 10 000 denar;

$p = \% \, 9$
$m = 5$ ay.

Verilen parametrelere göre, yatırımcının 5 ay sonra alacağı faiz miktarı:

$$k = \frac{10000 \cdot 9 \cdot 5}{1200} = 375 \text{ denar.}$$

Hesaplanan faiz miktarı gereğince, yatırımcının beş ay sonra, ana paraya faiz miktarının katılımıyla 10 375 denarı olacaktır. ♦

2. Bir kişi 25.05 günü 100 000 denar bankaya yatırmış ve 01.10 tarihinde 45 000 denar bankadan para almıştır. Banka %5 faiz oranıyla işlem yaptığına göre, yıl sonunda faiz miktarı ne kadar olacaktır?

$K_0 = 100\,000$ denar;
$p = \% \, 5$;
$t_1 = 221$ gün (25.05 ten yıl sonuna kadar);
$K_1 = -\, 45\,000$ denar;
$t_2 = 92$ gün (01.10 den yıl sonuna kadar);

$$i = i_1 - i_2 = \frac{100000 \cdot 5 \cdot 221}{36500} - \frac{45000 \cdot 5 \cdot 92}{36500} = 3027{,}4 - 567 = 2460{,}3\,. \; ♦$$

3. 2009 yılı boyunca X yatırımcısının tasarruf yatırımlarında değişiklikler olmuştur. Bu esnada bankanın uyguladığı faiz oranı %5'tir.

10.01.2009	yatırılmış	10 000
15.02.2009	yatırılmış	8 000
01.03.2009	çekilmiş	6 000
20.03.2009	yatırılmış	2 000

Yukarıdaki veriler tasarruf mevduatı hesabına kaydedilsin.

Her para yatırımı ve para çekilişi için yatırım (ya da çekiliş) yapıldığı günden yıl sonuna kadar faiz hesaplanır.

faiz oranı: % 5

tarih	yatırılmış	çekilmiş	durum	gün	Faiz miktarı		
					+	—	durum
10.01.2009	10 000		10 000	356	487,67		487,67
15.02.2009	8 000		18 000	320	351		838,67
01.03.2009		6 000	12 000	306		251,5	587,16
20.12.2009	2 000		14 000	12	3,29		590,44
31.12.2009	590,44	faiz	14 590,44			590,44	
Toplam 31.12.2009	20 590,44	6 000	14 590,44		841,96	841,96	0

Alıştırmalar

1. Bankaların geleneksel kaynakları nelerdir?

2. Basit ve bileşik faizin hesaplanmasında kullanılan kavramları (bileşenleri) sayınız.

3. Banka hesabının temel elemanlarını sayınız.

4. Bireysel kişi A, 25.01.2010 tarihinde bankaya 50 000 denar yatırmış, 20.09.2010 günü bankadan 35 000 denar çekmiştir. Banka %8 faiz oranıyla işlem yaptığına göre yıl sonunda yatırımcının toplam parasını hesaplayınız.

5. 2009 yılı boyunca X yatırımcısının tasarruf yatırımlarındaki değişiklikler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

05.01. 2009	yatırılmış	3 000
20.01. 2009	çekilmiş	2 500
31.01.2009	yatırılmış	3 200
28.02.2009	yatırılmış	3 350
03.04.2009	çekilmiş	4 000
04.06.2009	yatırılmış	5 000
09.09.2009	çekilmiş	3 700
10.11.2009	yatırılmış	3 000
25.12.2009	çekilmiş	5 000

Faiz oranı % 7,5 olduğuna göre, banka hesabındaki değişiklikleri hesaplayınız.

1.7. Kredi Banka Hesabı

Ekonomi çerçevesinde bankalar ve finans kuruluşları verimli işletmelere para transferi yapmaktır. Yani bankalar, fona ihtiyaç duyanlarla fonlarını değerlendirmek isteyenleri buluşturma açısından en önemli mali sistemdir. Bankaların en önemli görevlerinden biri, kaynak sağlamaktır. İkinci büyük görevi ise sağladığı kaynağın yatırılması, yani plasman görevidir ki bu da kredi verme şeklinde ortaya çıkar. Bankacılıkta kredi verme kavramı, verilen borcun belli bir süre sonunda geri alınmasından daha geniş bir işlem topluluğunu anlatır. Bankalar; müşterilerine işletme kredisi ve alışveriş kredisi adında borç para vererek kredi açar.

Vadesine göre kredi çeşitleri:

- kısa vadeli krediler (geri ödemesi en çok bir yıl vadeli);
- orta vadeli krediler (geri ödeme vadesi 1 yıldan üç yıla kadar);
- Uzun vadeli krediler (geri ödemesi üç yıldan fazla) kredilerdir.

Kısa vadeli krediler, müşterilerin günlük ihtiyaçlarını finanse etmek, ticarette kısa vadeli ödemeleri sağlamak, üretimde, ihracatta ve hizmetlerin ödenmesi için kullanılır. Kısa vadeli kredi, müşterinin talebi üzere verilir ve ard arda ya da döner (revolving) olabilir. Kredinin geri ödenmesi vadesinin tamamlanmasına kadar eşit aylık taksitlerle ya da revolving - sözleşme dinamikliği taksitleri biçiminde yapılabilir. Kredinin teminatı, gayrimenkul ipoteği ile, satılabilir araç varlıkları, depozito, banka garantisi, değerli kağıtlar ve haklar ile yapılmaktadır.

Kişilere uzun vadeli krediler – Bu krediler genellikle uzun vadeli yatırımlar için, yatırım projelerin gerçekleştirilmesi için, ticari amaçlı vb. olabilir. Uzun vadeli kredilerin geri ödeme vadesi üç yıla kadardır (ya da bankanın durumuna göre üç yıldan fazla da olabilir). Denar cinsinden ya da döviz bazında olabilir.

Parasal varlıkların amaçlı kullanılmasına dair gösterilen belgeler gereğince uzun vadeli kredilerin kullanılış şekli, müşterinin isteği üzeredir. Kredi, yatırım dinamiği gereği eşit aylık, üç aylık ya da yarım yıllık taksitlerle geriye ödenebilir. Kredinin teminatı, gayrimenkul ipoteği ile, satılabilir araç varlıkları, depozito, banka garantisi, değerli kağıtlar ve haklar ile yapılmaktadır.

Kredinin fiyatı (faiz oranı) kredinin vadesine göre belirlenir. Onaylanan kredi için banka özel hesap – kredi hesabı açar. Onaylanan kredi miktarı müşterinin cari – hesabına aktarılır ve bu hesaptan müşteri krediyi kullanabilir. Geri ödeme taksitinin belirlenen vadede ödenmemesi durumunda öngörülen faize ceza faizi de eklenir. Faizin ödenmesinde günler takvime göre sayılır, bir yıl ise 365 ya da 366 gün olarak alınır.

Onaylanan krediler, elektronik vasıtalarla kredi ve ciro hesabından takip edilmektedir.

1. Bir X şirketine bir bankadan kullanma tarihi 30.07.2010 yılı başlamak üzere 1.000.000 denar kredi onaylanmıştır. Sıralı faiz oranı yıllık %9, ceza faizi ise yıllık %3'tür. Şirket 01.02.2010 tarihinde onaylanan kredinin tümünü bankadan çekerek kullanmış ve geri ödeme taksitlerini şu vadelerde gerçekleştirmiştir:

20.03.2010	I. taksit	100 000 denar
15.04.2010	II. taksit	120 000 denar
01.08.2010	III. taksit	180 000 denar
15.08.2010	IV. taksit	600 000 denar

30. 09. 2010 tarihine kadar bankanın kredi hesabında tüm değişiklikler (sıralı ve ceza faizlerinin hesaplanmasıyla) gösterilsin. Ayrıca, X müşterisinin de banka hesabındaki değişiklikleri gösterilsin.

Değişme tarihi	Değişme tutarı		Faizde kalan günler		Faiz tutarı	
	verilen	alınan	sıralı	cezalı	sıralı	cezalı
01.02.2010	1 000 000		242		v 59 672	
20.03.2010		100 000	194		a 4 784	
15.04.2010		120 000	168		a 4 971	
01.08.2010		180 000	66		a 7 457	
15.08.2010		600 000	15	46	a 2 219	v 2 268,5
Toplam	1 000 000	1 000 000			v 79 103	v 2 268,5

Kredi tutarının sıralı faiz günleri 01.02'den 30.09 tarihleri arasındaki günler için hesaplanmıştır. Bu günlerin faiz miktarı kredi sahibinin borcuna yazılır (d işareti ile işaretlenmiştir). Diğer değişikliklerin sıralı faizi ise, değişim yapılan günden ödeme vadesi gününe kadar (30. 09. 2010) günlere hesaplanır. Bu günler sayısına karşılık gelen faiz miktarı karşılık gelen değişim için çıkarılır (z işaretiyle işaretlenmiştir). Ceza faizi, kredinin çekiliş gününden değişim tarihine kadar gün sayısı için hesaplanır. Bu faiz ile kredi sahibi borçlanır.

X şirketinin banka hesabı

Değişme tarihi	Cinsi	Değişim miktarı		Son durum
		veriyor	alıyor	
15.01.2010	durum		500 000	500 000
01.02.2010	kredi		1 000 000	1 500 000
20.03. 2010	I. taksit	100 000		1 400 000
15.04. 2010	II. taksit	120 000		1 280 000
01.08. 2010	III. taksit	180 000		1 100 000
15. 08.2010	IV. taksit	600 000		500 000
30.09.2010	% 9 faiz	79 103		420 897
30.09.2010	% 3 ceza faizi	2 268,5		418 628,5
30.09.2010	dengeleme	418 628,5		
		1 500 000	1 500 000	
01.10	Son durum			418 628,5

Alıştırmalar

1. Ödeme vadesine göre kaç çeşit kredi vardır?
2. Kısa vadeli kredilerin kullanılışını ve özelliklerini sayınız.
3. Uzun vadeli kredilerin kullanılışını ve özelliklerini sayınız.
4. Kredinin fiyatı neye bağlıdır?

5. Bir X şirketine bir bankadan kullanma tarihi 26.04.2010 yılı başlamak üzere 20.000.000 denar kredi onaylanmıştır. Sıralı faiz oranı yıllık %7,5, ceza faizi ise yıllık %2'dir. Şirket 01.03.2010 tarihinde onaylanan kredinin tümünü bankadan çekerek kullanmış ve geri ödeme taksitlerini şu vadelerde gerçekleştirmiştir:

05.03.2010	I. taksit	270 denar
12.04.2010	II. taksit	580 denar
17.05.2010	III. taksit	700 denar
23.05.2010	IV. taksit	18 450 denar

30. 06. 2010 tarihine kadar bankanın kredi hesabında tüm değişiklikler (sıralı ve ceza faizlerinin hesaplanmasıyla) gösterilsin. Ayrıca, X şirketinin banka hesabındaki başlangıç para durumu 50 000 denar olduğuna göre, banka hesabındaki değişiklikler göstertilsin.

1.8. Konu Pekiştirme Alıştırmaları

1. 17 628 denar %6 faiz oranıyla ne kadar zamanda 2 393 denar faiz miktarı getirir?

2. Faiz oranı % 4,5 ile 20 000 denar 3 ay, 40 000 denar 5 ay ve 12 000 denar 6 ayda getirdikleri toplam faiz miktarını, hangi temel para 20 mart – 28 haziran zaman aralığında, zaman matrisi (*k,* 360), faiz oranı %4,75 olmak üzere iki defa daha çok faiz miktarı getirecektir.

3*. Faiz oranı % 6,5 olmak üzere 25 000 denar 8.04 - 30.06 zamanı için, 62 000 denar 18.04–30.06 zamanı için ve 75 6000 denar 4.05–30.06 zamanı için elde edilen toplam faiz miktarının % 45'i, hangi faiz oranıyla 60 000 denar (*k*, 360) ilkesine göre 18.03–29.06 zaman aralığında elde edilir?

4*. Temel paranın üçte biri 1,5 yıl için, beşte ikisi 4 ay için ve kalan kısmı 80 gün için bankaya yatırılmıştır. Her biri için faiz oranı %4'tür. Bu yatırımların toplam faiz miktarı 8500 denar olduğuna göre temel para ne kadardır?

5. Temel paranın dört aylık % 4,75 faiz miktarı kadar azaltılmasıyla borçlu 295 250 denar para almıştır. Borç ve faiz miktarı ne kadardır?

6. Borçlu, 60 günde % 6 faiz oranıyla elde edilen faiz miktarını katarak 50 500 denar borç ödemiştir. Bu temel paranın iki katı, 3 yıl vadeli aynı faiz oranıyla ne kadar faiz getirir?

7. Temel paranın 25.01–31.08 zaman aralığında, günler takvimin (*k*, 365) zaman matrisine göre sayılarak % 9 faiz miktarı kadar azaltılmasıyla borçlu 100 000 denar para almıştır. Borç ve faiz miktarı ne kadardır?

8. Bir kişi bankaya 4 ayrı borç ödemelidir: 10.04 vadeli % 6 faiz oranıyla 45 000 denar, 25.04 vadeli % 8 faiz oranıyla 100 000 denar, 20.05 vadeli % 9 faiz oranıyla 70 000 denar ve 31.05 vadeli %4 faiz oranıyla 100 000 denar. Hiçbiri zararlı olmayacak şekilde hangi gün ve hangi faiz oranıyla borçlu borcunu bir günde ödeyebilir?

9. Bir ticaret şirketinin, mal tedarikçilerine borçları: % 4 faiz oranıyla ödeme vadesi 120 gün 40 000 denar, % 4 faiz oranıyla 240 gün vadeli 60 000 denar ve % 4 faiz oranıyla 300 gün vadeli 100 000 denar. Kaç gün sonra şirket her üç borcu aynı günde ödeyebilir?

10. Ticaret şirketi X, ödeme tarihi 5.04 olan 80 000 denar, 20.05 günü 150 000 denar ve 30.06 günü 275 000 denar ödenmesi gereken borçları vardır. Aynı zamanda ödeme tarihi 17.03 olan 130 000 denar, 05.08 de 900 000 denar olan alacakları vardır. Borcun saldosu (son durumu) hangi tarihte ödenebilir?

11. X şirketi 06.04.2009 günü bankaya kırdırmak üzere poliçe getirmiştir. Poliçenin nominal değeri $ 250 000'dir ve ödeme vadesi 15.05.2009 dir. Bankanın iskonto oranı %8 olduğuna göre, poliçenin ticari indirimini ve efektif miktarını hesaplayınız.

12. E şirketi sattığı mal karşılığında 3 000 000 değerinde, ödeme vadesi 20.04.2009 günü olan bir poliçe almıştır. Para sıkıntısı sebebiyle şirket 21.03.2009 günü poliçeyi kırmaya kararlaştırıyor. İskonto oranı %6, yapılan işlemin komisyonu %0,025 ve manipülatif masraflar 50 denar olduğuna göre, bankanın şirkete ödeyeceği paranın nominal değeri ne kadardır?

13. X şirketi 150 000 denar değerinde ödeme vadesi 05.05.2009 tarihli olan bir poliçenin sahibidir. Şirket bu poliçeyi ödeme vadesinden önce kırmaya kararlaştırıyor. Kırma tarihi 05.03.2009 günü, iskonto fiyatı %9, komisyon 0,045 ve manipülatif masraflar 100 denardır. Kırılan poliçenin efektif değeri ve ticari indirim ne kadardır?

14. 20.04.2010 günü banka nominal değeri $50 000 olan üç eşit poliçe almıştır. Poliçelerin ödeme vadeleri: birincisi 20.06.2010, ikincisi 10.07.2010 ve üçüncüsü 20.07.2010 günüdür. İskonto fiyatı (oranı) %8,5, komisyon %1 ve manipülatif masraflar 19 denar olduğuna göre, banka 20.04.2010 günü poliçeler için ne kadar ödeyecektir?

15. Bir bankaya 15.03.2010 tarihinde kırılmak üzere iki poliçe getirilmiştir:

- poliçe X, nominal değeri $ 3 000 000 ve ödeme vadesi 25.01.2010 ve

- police Y, nominal değeri $ 5 000 000 ve ödeme vadesi 20.06.2010 günü.

İskontolanmış bu poliçelere talip olan müşteri kendi hesabına bir ortalama vadede yatırılmasını istemiştir (aynı günde her iki poliçenin sahibi olsun). İskonto edilmiş miktarların müşteri hesabına yazılacağı gün tarihi belirtilsin.

16. Bankaya 01.08 günü 400 000 denar para yatırılmış ve 02.10 günü 120 denar çekilmiştir. Faiz oranı %5 olduğuna göre yıl sonunda faiz tutarı ne kadardır?

17. Yatırımcı Y'nin banka hesabında faiz oranı %10 olmak üzere, 2010 yılında aşağıdaki değişiklikler olmuştur:

15.03.2009	yatırılmış	50 000
01.04.2009	Çekilmiş	20 000
05.06.2009	yatırılmış	18 000
07.07.2009	Çekilmiş	15 000
08.08.2009	yatırılmış	18 000
01.09.2009	Çekilmiş	13 000

Verilenlere göre, banka hesabında tüm değişiklikler kaydedilsin.

18*. Y şirketi, bir bankadan ödeme vadesi 25.06.2010 olmak üzere 70 000 denar kredi almıştır. Sıralı faiz oranı %10, ceza faiz oranı ise yıllık %2'dir. Şirket 01.04.2010 günü tüm kredi miktarını kullanıyor ve kredinin geriye çevrilmesini aşağıdaki tarihlerde gerçekleştiriyor:

01.05.2010	I. taksit	7 000 denar
10.05.2010	II. taksit	10 000 denar
20.06.2010	III. taksit	15 000 denar
25.07.2010	IV. taksit	38 000 denar

30.08.2010 gününe kadar bankadaki kredi hesabında yapılan değişiklikleri (sıralı ve ceza faiz miktarlarının faizlerini hesaba katarak) gösteriniz. X şirketinin başlangıçtaki para durumu (saldosu) 30 000 denar olduğuna göre, şirketin banka hesabındaki tüm değişiklikleri gösterilsin.

Konu Özetleri

Bankadan borç (kredi) aldığımızda, banka **alacaklı**, parayı alana ise **verecekli (borçlu)** denir. Bankanın parasından yararlanan verecekli, karşılık olarak bankaya belli bir **faiz** ödeyecektir. Bankaya para yatırdığımız takdirde, banka kullanıcıdır ve vericiye belli bir faiz ödemektedir. Bir yatırımın, yatırım dönemi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranına **basit faiz** denir.

Faiz miktarının ve ona bağlı olan diğer büyüklüklerin hesaplanmasına **basit faiz hesabı** denir. Basit faiz hesabında genel olarak şu dört temel büyüklüğe rastlanılır:

$$\boxed{i = \frac{Kpt}{100}}$$

K – Ana para (kapital, temel değer)
i – faiz miktarı (yüzde payı)
p – yüzde oranı (faiz miktarı)
t – faizin hesaplandığı süre (zaman).

Birkaç borç miktarı farklı vadelerde ödenecek yerde, toplam borcu aynı anda ödenmesi için ayrılan zamana **orta vade** denir. Ortalama vadeyi ve ortalama faiz oranını belirtme işlemine **vadeli hesap** denir ve aslında basit faiz hesabının bir uygulanmasıdır. Bazı durumlarda borçlu, aynı anda başka borçlulardan alacaklı durumunda olabilir. Böyle durumda alacak ve verecek farkını ödeme vadesine **borç durumunun (saldosunun) ödeme vadesi** denir.

Ortalama faiz oranı bilindiği takdirde, borcun ortalama ödeme vadesini şu formülle hesaplayabiliriz:

$$\boxed{t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{p_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}},$$

Borç miktarlarının ödeme vadeleri bilindiğinde ortalama faiz oranına ait şu formülü uygulayacağız:

$$\boxed{p_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + \ldots + K_n p_n t_n}{t_s\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_n\right)}},$$

burada $K_1, K_2, \ldots, K_n$, borç miktarları, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ karşılıklı faiz oranları ve $t_1, t_2, \ldots, t_n$ karşılıklı ödeme vadeleridir.

Borç kalanı (saldo) vadesinin hesaplanması şu formülle hesaplanır:

$$t_s = \frac{K_1 p_1 t_1 + K_2 p_2 t_2 + ... + K_n p_n t_n - \left(P_1 p_1{}^0 t_1{}^0 + P_2 p_2{}^0 t_2{}^0 + ... + P_m p_m{}^0 t_m{}^0\right)}{Sp_s}$$

burada K_1, K_2, … K_n borç miktarları , vadeleri t_1 , t_2 ,… t_n günler ve p_1 ,p_2 , … p_n karşılıklı olarak faiz oranları; P_1, P_2, … P_n alacaklar, onlara karşılık vadeleri $t_1°$,$t_2°t_{m°}$ günler ve $p^0{}_1$, $p^0{}_2$,…,$p^0{}_m$ faiz oranlarıdır.

Henüz vadeleri yetişmemiş alacakların satışı durumunda, satış gününden alacakların vadesinin olduğu güne kadar faiz miktarının alacaktan eksilmesine **iskonto** denir.

Belli bir tarihte ödenmesi gereken borcu, vadesi gelmeden belli bir tarihte ödemeye dönüştürme işlemine (şimdiki değeri, ilerdeki borcun değerine dönüştürülmesine) **iskontolama** denir.

İndirim (iskonto) hesaplamaların yapılmasında şu parametrelerden yararlanılır:

N - Finansal varlığın nominal değeri;

t,m,n - İndirim (iskonto) vadesi, varlığın indirilme gününden tahsilat gününe kadar günler sayısı *t*, aylar sayısı *m,* yıl sayısı *n.* Ayların günleri takvime göre alınır, öyle ki varlığın indirilmesi yapıldığı gün sayılmıyor, varlığın tahsil edildiği gün sayılır.

D - İndirim (eskonto). finansal varlığın nominal değerinin azalmasına eşittir.

p - İndirimin hesaplanmış olduğu faiz oranı (iskonto oranı) ;

E - Nominal borcun erken ödeme anında reel (efektif) miktar.

İndirimin hesaplanması iki şekilde yapıldığına göre, iki tür indirim vardır: *Dk,*- **Ticari** indirim; burada indirimin hesaplandığı temel değer, nominal değerdir, efektif değer ise nominal değer ve indirimin farkıdır ve **rasyonel** (matematiksel) indirim – *Dr*, burada nominal değer, efektif değer ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır.

Poliçe; belli miktar paranın hamile ödenmesi hususunda kayıtsız şartsız havale emrini taşıyan özel şekil şartlarına tabi kıymetli evrak vasfında, soyut nitelikte bir alacak senedidir.

Poliçenin temel çeşitleri **hamil** ve **şahsi** poliçelerdir. Hamil poliçe şu temel unsurları içermelidir: poliçe işareti, ödeyecek olanın adı, keşideci adı, ya da adresi, kime ve kimin emrine ödeneceği – lehdar, tanzim (düzenleme) yeri ve tarihi, belli bir paranın kayıtsız şartsız ödenmesi için havale, ödeme yeri, poliçenin yazılma tarihi ve yeri, ödeyecek olanın imzası. Şahsi poliçe şu unsurları içerir: para miktarını kayıtsız şartsız ödeyeceğine dair vaat vermesi, havale tarihi, ödeme yeri, alacaklının adı, poliçenin yazılma tarihi ve yeri ve ödeyen kişinin imzası.

Poliçe işlemleri, hukuk işlemleridir ve poliçe hakkında şu işlemler yapılabilir: poliçenin verilmesi, poliçenin onaylanması, poliçenin vurgulanması, poliçenin devredilmesi, poliçenin havale edilmesi, poliçenin satın alınması, amortisman, geriye çevrilmesi, poliçenin protesto edilmesi vb.

Poliçe hukuk işlemlerinde karakteristik kurallar genellikle şunlardır: okur yazarlık, inkorporasyon, birleşme (şirketleşme), poliçe sorumluluğun kesinliği, poliçe titizliği, ve poliçe bedelini doğrudan doğruya tahsil etmedir.

Poliçe iskontosu, vade tarihinden önce poliçenin satışı ya da satın alışıdır. Bu durumda satın alan kişi poliçenin iskonto gününden vadesi doluncaya kadar günlere karşılık gelen faiz tutarı kadar poliçenin nominal değerinden eskitir.

Ticari iskonto şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{D_k = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100}}$$

Rasyonel iskonto ise şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{Dr = \frac{N \cdot t \cdot p}{360 \cdot 100 + p \cdot t}}.$$

Burada N nominal değer (parasal değer), t gün sayısı olarak iskonto vadesi ve p – iskontonun hesaplandığı faiz oranıdır (miktarıdır).

Banka iskontosundan poliçe sahibinin elde edeceği efektif miktarı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{E = N - \left(1 - \frac{p \cdot t}{360 \cdot 100}\right)},$$

Burada N nominal değer (parasal değer), t gün sayısı olarak iskonto vadesi ve p – iskontonun hesaplandığı faiz oranı (miktarı) dır.

Tasarruf mevduatlarına faiz miktarının hesaplanmasında, basit faiz hesabı formülünden yararlanılır. Vade, yıl, ay ya da günler ile ifade edildiğinde basit faizin hesaplanması için şu formüller geçerlidir:

- vade n yıl için $k = \frac{K_0 pn}{100}$;

- vade ay ile verildiğinde $k = \frac{K_0 pm}{1200}$
- vade günlerle ifade edildiğinde $k = \frac{K_0 pt}{36500}$ formülü kullanılır.

Burada, K_0 temel para (ana değer), p - faiz oranı ve t – zamandır.

Bankalar; müşterilerine işletme kredisi ve alışveriş kredisi adında borç para vererek kredi açar. Vadesine göre kredi çeşitleri: kısa vadeli krediler, orta vadeli krediler ve uzun vadeli krediler (geri ödemesi üç yıldan fazla kredilerdir).

2 KIYMETLİ METALLER, PARALAR VE DÖVİZLER

2.1. Kıymetli Metallerin Arılığı

Altın, gümüş, platin, rutenyum, rodyum, osmiyum, paladyum ve iridyum elementleri **kıymetli metaller** gibi tanınmıştır. Bunlardan bazıları daha çok eski zamanlardan bilinmektedir. Bunların özellikleri, diğer elementlerden daha az reaktivite özelliğine sahip olup, havada oksidasyon olmuyor ve asitlerde erimiyorlar. Döviz rezervleri gibi kullanılabilir. Bunların büyük önemi nedeniyle, kıymetli metallerden yapılmış olan nesnelerin kontrolü, yapılışı ve arılık derecesi, onların incelemesi, işaretlenmesi, pazara satış koşulları ve kontrolü kanunla düzenlenmektedir.

Burada kıymetli metallerden altın ve gümüşü inceleyeceğiz. Bu metaller çok tanınmış, değerlendirilmiş ve çok eski zamanlardan, yani binlerce yıl önceden bu güne kadar kullanılmaktadır. Altın ve gümüş çok yumuşak metallerdir ve bu yüzden kullanılış için pratik değildirler. Biraz sertlik kazanmak için, başta bakır, nikel ve başka metallerle karıştırılır. İki ya da daha çok metalin karışımına **filiz** (alaşım, karışım) denir. Filizin kütlesine **toplam kütle** diyeceğiz.

Kıymetli metalin kütlesi (saf kütle) ve filizin kütlesinin oranına, kıymetli metalin **arılık (saflık) derecesi** denir. Kıymetli metallerin arılık derecesi **milyem (promil)** ve **İngiliz usulü** olmak üzere iki şekilde ifade edilir.

Saflık milyem biçiminde gösterildiğinde kıymetli metal milyem ile ifade edilir. Bu durumda milyem sayısı, bir filizde 1000 eşit parçadan kaç eşit parça kıymetli metal olduğunu gösterir. Örnek, bir kıymetli metalin arılık derecesi $900^0/_{00}$ ile ifade edilmişse, filizin 1000 parçasında 900 parça kıymetli metaldir. Toplam kütleyi m ile, saf kütleyi m_b ile ve arılık derecesini f ile işaret edersek, arılık derecesinin milyem usulüne göre gösterilişini şu formülle ifade edebiliriz:

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000\ ‰}$$

1. Bir altın nesnenin saf kütlesi 510 gram ve toplam kütlesi 800 gramdır. Nesnenin arılık derecesini (milyem olarak) ifade ediniz.

Altın nesnenin arılık derecesi $f = \frac{510}{800} \cdot 1000 = 637{,}5\ ‰$. dir. ♦

Arılık derecesinin İngiliz usulü ile ifade edilmesinde, altının ölçü birimi **ayar** (**karat),** gümüşün arılık derecesi ise **peniveyt** (pennyweight) ile gösterilir. Saf altının arılık derecesi 24 karat, saf gümüşün arılık derecesi ise 240 peniveyt dir.

2. Arılık derecesi 14 ayar olan bir altın nesnenin 24 kısmından 14 kısım saf altındır. ♦

3. Arılık derecesi 200 peniveyt olan gümüşten bir ürünün 240 kısmından 200 kısmı saf gümüştür. ♦

Karat ve peniveytten küçük ölçü birimi **greyn'**dir. 1 karatta 4 greyn ve 1 peniveytte 24 greyn vardır.

Arılık derecesi 22 karat (ayar) olan altına **standart altın**, 222 peniveytlik gümüşe **standart gümüş** denir. Bir altın (gümüş) filizinin arılık derecesi standart saflıktan daha iyi ise, ona B işareti yazılır (İng. Better –daha iyi); ya da standart saflıktan daha kötü ise W işareti konulur (İng. Worse – daha kötü).

4. Altın nesnenin saflığı standart altından 1 karat ve 2 greyn daha iyi olduğu durumda *B*1,,2 biçiminde yazılır. O halde altın nesne (22+ 1,,2 = 23,,2) 23 karat ve 2 greyndir. ♦

5. Arılık derecesi *W* 7,,7 olan gümüş nesne, standart gümüşten 7 peniveyt kadar daha kötüdür. 222 – 7,,7 = 221,,24 – 7,,7 = 214,,17 olduğuna göre, gümüş nesnenin arılık derecesi 214 peniveyt ve 17 greyn'dir. ♦

Alıştırmalar

1. a) Kıymetli metallerin arılık derecesi nedir?
b) Kıymetli metallerin arılık derecesi nasıl ifade edilir?

2. Arılık derecesi
a) 920 ‰ b) 870‰
verilmiş olan altın filizin kaç kısmı bakırdır?

3. Saf altın kaç karattır? Saf gümüş ise kaç karattır?

4. a) Saflığı 20 karat olan altın nesne;
b) Saflığı 210 peniveyt olan gümüş nesne kaç greyndir?

5*. a) *B* 1,,1 işaretli altın nesnenin; b) *W* 5,,3 işaretli altın nesnenin;
c) *B* 10,,11 işaretli gümüş nesnenin; d) *W* 12,,8 işaretli altın nesnenin
arılık derecesi ne kadardır?

2.2. Arılık (Saflık) Derecesinin Hesaplanması

Kıymetli metallerin arılık derecesini hesaplamak için iki cins ödevler vardır:

- Arılık derecesini İngiliz usulüne göre milyemlerle gösterme ve tersine işlemleri olan ödevler;

- Kıymetli metalin saf kütlesi ve filizin kütlesi bilindiğinde, kıymetli metallerin arılık derecesini hesaplama gibi ödevler.

1. Arılık derecesi 800‰ olan altın nesnenin saflığını İngiliz usulüne göre ifade ediniz.

$x : 24 = 800 : 1000$ orantısından $x = \dfrac{24 \cdot 800}{1000} = 19{,}2$ karat elde edilir. Demek ki altının arılık derecesi 19,2 karattır. 0,2 karat $0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ greyn olduğuna göre, altının arılık derecesi 19 karat ve 0,8 greyndir diyebiliriz. Bunu (22 – 19,,08 = 21,,4 – 19,,08 = 2,,3,2) W 2,,3,2 biçiminde yazabiliriz. ♦

2. B 8,,6 işaretli gümüşün arılık derecesini milyemle gösteriniz.

Arılık derecesini önce peniveytlerle hesaplayalım. 222 + 8,,6 = 230,,6'dır. 6 greyn bir peniveytin $\frac{1}{4}$' ü olduğuna göre, gümüşün arılık derecesi 230,25 peniveyt olduğunu buluyoruz.

$x : 1000 = 230{,}25 : 240$ orantısından $x = \dfrac{230{,}25 \cdot 1000}{240} = 959{,}375$ ‰. elde edilir. Demek ki gümüşün arılık derecesi 959,375‰ dir. ♦

3. Toplam kütlesi 400 gram olan gümüş nesnede 350 gram saf gümüş vardır. Gümüşün arılık derecesini milyemlerle ifade ediniz.

Gümüşün arılık derecesi, $\dfrac{350}{400} \cdot 1000$ ‰, bağıntısından 875‰ elde edilir. ♦

4. Toplam kütlesi 300g olan altın nesnede 249 g saf altın vardır. Altının arılık derecesini iki usule göre gösteriniz.

Arılık derecesini önce milyemlerle göstereceğiz. $\dfrac{249}{300} \cdot 1000$ ‰. Demek ki, altın nesnenin arılık derecesi 830 ‰'dir.

Şimdi, aynısını İngiliz usulüne göre ifade edelim. $x : 24 = 830 : 1000$ orantısından $x = \dfrac{24 \cdot 830}{1000} = 19{,}92$ karat elde edilir. Demek ki altın nesnenin arılık derecesi 19 karat ve 3,68 greyndir. Sonuç olarak altın nesne W 2,,0,32 dir. ♦

Alıştırmalar

1. Milyem ölçüsüne göre arılık derecesi 590 ‰ olan gümüşün saflığını İngiliz usulüne göre ifade ediniz.

2. İngiliz usulüne göre arılık derecesi B 1,,2 olan altının saflığını milyemlerle ifade ediniz.

3. Altın nesnenin arılık derecesi 15,36 karattır. Bunu milyemlerle gösteriniz.

4. Kütlesi 330 g olan altın nesnede 198 g saf altın vardır. Altının arılık derecesini
a) milyemlerle; b) İngiliz usulüne göre
ifade ediniz.

5. Kütlesi 250 g olan bir gümüş nesnede 198 g saf gümüş vardır. Gümüşün arılık derecesini
a) milyemlerle; b) İngiliz usulüne göre
ifade ediniz.

2.3. Saf ve Toplam Kütlenin Hesaplanması

Kıymetli metalin saf kütlesini hesaplamak için, filizin arılık derecesi ve toplam kütlesinin bilinmesi gerekir.

Birkaç örnek inceleyelim.

1. Kütlesi 50 g olan bir altın nesnenin arılık derecesi 920‰'dir. Nesnede kaç gram saf altın vardır?

$x : 50 = 920 : 1000$ orantısından $x = \dfrac{50 \cdot 920}{1000} = 46$ elde edilir. Demek ki altın nesnede 46g saf altın vardır. ♦

2. Arılık derecesi 18 karat olan 560 gramlık bir altın nesnede kaç gram saf altın vardır?

$x : 560 = 18 : 24$ orantısından $x = \dfrac{560 \cdot 18}{24} = 420$ elde edilir. Demek ki altın nesnede 420g saf altın bulunur. ♦

3. Saflık derecesi *W 8,,6* olan bir gümüş eşyanın kütlesi 480g'dır. Nesnede kaç gram saf gümüş vardır?

Gümüşün saflık derecesini peniveytlerle hesaplıyoruz.

222 – 8,,6 = 221,,24 – 8,,6 = 213,,18 elde edilir. Buna göre gümüşün arılık derecesi $213\dfrac{18}{24} = 213\dfrac{3}{4} = 213{,}75$ peniveyttir.

Şimdi, $x : 480 = 213{,}75 : 240$ orantısından $x = \dfrac{213{,}75 \cdot 480}{240} = 427{,}5$ elde edilir.
Demek ki, gümüş eşyada 427,5g saf gümüş vardır. ♦

Bir filizin toplam kütlesini hesaplamak için, kıymetli metalin saflık derecesi ve kütlesi bilinmelidir.

4. Saflık derecesi 800‰ olan bir altın nesnede 648*g* saf altın vardır. Nesnenin kütlesi ne kadardır?

$x : 648 = 1000 : 800$ orantısından $x = \dfrac{648 \cdot 1000}{800} = 810$ elde edilir. Demek ki filizin toplam kütlesi 810 *g*'dır. ♦

5. Saflık derecesi 230 peniveyt olan bir gümüş nesnede 483*g* saf gümüş vardır. Nesnenin kütlesi ne kadardır?

$x : 483 = 240 : 230$ orantısından $x = \dfrac{483 \cdot 240}{230} = 504$ elde edilir. Gümüş eşyanın toplam kütlesi 504 *g*'dır. ♦

6. Saflık derecesi B 1,,12 olan bir gümüş nesnede 1341*g* saf gümüş vardır. Nesnenin kütlesi ne kadardır?

Gümüşün arılık derecesi 222 + 1,,12 = 223,,12 ya da $223\dfrac{12}{24} = 223{,}5$ peniveyttir. O halde $x : 1341 = 240 : 223{,}5$ orantısından $x = \dfrac{1341 \cdot 240}{223{,}5} = 1440$ elde edilir. Gümüş nesnenin toplam kütlesi 1440*g*'dır. ♦

Alıştırmalar

1. Kütlesi 180*g* ve arılık derecesi 880‰ olan altın nesnede ne kadar saf altın vardır?

2. Kütlesi 600*g* ve arılık derecesi *W* 22,,12 olan gümüş nesnede ne kadar saf gümüş vardır?

3*. Saflık derecesi 850‰ olan gümüş nesnede 595*g* saf gümüş vardır. Nesnenin toplam kütlesi ne kadardır?

4*. Saflık derecesi *W* 1,,3 olan altın nesnede 324*g* saf altın vardır. Nesnenin toplam kütlesi ne kadardır?

5*. Saflık derecesi 750‰ olan altın nesnede 126*g* saf altın vardır. Buna ne kadar saf altın katılmalıdır ki, nesnenin saflık derecesi 800‰ olsun?

2.4. Para Birimi Kavramı ve Önemi

Latin sözü "valuta"dan kaynaklanan para birimi kavramının birçok anlamı vardır. Para, devletçe bastırılan, üzerinde itibari değeri yazılı kağıt ya da metal ödeme aracıdır. Para biriminin birkaç anlamı vardır:

- **temel para birimi** (adı, şekli, yapılışı) **bir devletin para sistemini** ifade eder;

- devlet içinde kanun aracı olarak finans ödemeler için, yani bir devletin para sisteminin temel para birimini, **efektif paraları ve para işaretlerini** (metal ya da kağıt banknotlar) ifade eder;

- uluslararası ticarette sadece **etkin yabancı paraların** anlamı vardır, yabancı devlette ikamet edenlerin para ve para işaretleridir.

Uluslararası ticarette parayı temsil eden belgeler: çek, fatura, akreditifler ya da uluslararası ödemelerde kullanılan çeşitli araçlar para kavramı kapsamında değildir. Ancak devletlerin resmi para işaretleri bulunan milli banknotlar ve demir paralar da geçerlidir.

Makedonya Cumhuriyeti Döviz Kanununa göre, yabancı devletlerin kullandıkları efektif paralar yabancı para sayılır, ancak yabancı devletlerin bastıkları altın paralar müstesnadır, çünkü bunlar kıymetli metaller kavramına girer.

Para birimi, bir devletin para sisteminin temel birimidir; kanunla düzenlenmiş bir ülkenin değerlerinin temel ölçüsüdür.

Ülkelerin paralarının adları farklı (örnek:denar, dinar, euro, dolar, funt, şiling v.b.), fakat birçok ülkenin sadece isimleri aynı fakat diğer özellikleri, örneğin değerleri şekilleri farklı olan paralar da vardır. Örnek: para birimi dolar olan birçok ülkeler: Avustralya, Kanada, Hong Kong ve ABD.

Temel birim olan para, genellikle küçük kısımlara (ufaklı paralara) ayrılarak, genellikle ondalık ya da diğer bir sistem uygulamakla farklı adlarla ifade ediliyorlar (örneğin, ABD doları 100 sent, Makedonya denarı 100 deni vb.).

Para sisteminin temelini teşkil eden kıymetli metaller, daha doğrusu altının geçerliliğe geçtiği dönemlerde her ülke, kendi parasının ne kadar kıymetli metal içereceğini, kuvveti ve istikrarına bağlı olarak kendine ait kanunlarla tespit edilmekteydi. Bununla, belli ağırlıkta kıymetli metalden oluşan bir para biriminin miktarını devlet kanunla düzenlemişti.

Günümüzde artık hiçbir ulusal ekonomide tam değerinde para birimleri fonksiyonda değildir. Onlar artık para işaretleriyle, yani kağıt paralarla değiştirilmiştir. Günümüzdeki paraların yapıldığı malzemenin değeri çok düşüktür ve onların kendi asıl değerleri hemen de hiç yoktur. Bir ulus devletinin ekonomisi çerçevesinde üretebildiği mal ve yaptığı hizmetlerle kağıt paralar değerlerini kazanıyorlar. Bir devletin parasal otoritesinin verdiği desteklerle de kağıt paralar kendi değerini belli bir seviyede tutabiliyorlar. Devletin parasal yetkili organları özerk yasa ile milli paranın değerini belirtir ve devletin ekonomik işlemlerinin kusursuz işlemesini sağlamak onların görevidir.

Mal ekonomisinde yapılan tüm işlemler para yardımıyla yapılır. Bu nedenle mal üretiminin ve piyasanın etkisine dayanan ekonominin tüm işlevlerini para sistemi kontrol etmektedir. Ekonominin çeşitli alanlarında olabilecek herhangi dengesizlik, para ifadesi olarak algılanır ve ekonominin parasal sektörüne da yansır. Diğer taraftan ekonominin parasal sektöründe de dengesizlik olabilir ve bu durum ekonominin reel sektörünü etkilemektedir. Bu şekilde ekonominin parasal ve reel sektörü arasında interaktif ilişkiler meydana gelir. Ekonomi büyüme oranı, işsizlik oranı, enflasyon, ihracat ve ithalat oranı gibi ekonomi performansların oluşumu, ekonominin reel ve parasal sektöründeki interaktif ilişkileriyle meydana gelmektedir.

Alıştırmalar

1. Para birimi kavramının önemini açıklayınız.

2. Para biriminin tanımını ifade ediniz.

3. Para birimlerin değeri neye bağlıdır?

4. Kağıt paraların değeri nasıldır?

5. Parasal sistem ve parasal otoritesi kavramlarını açıklayınız.

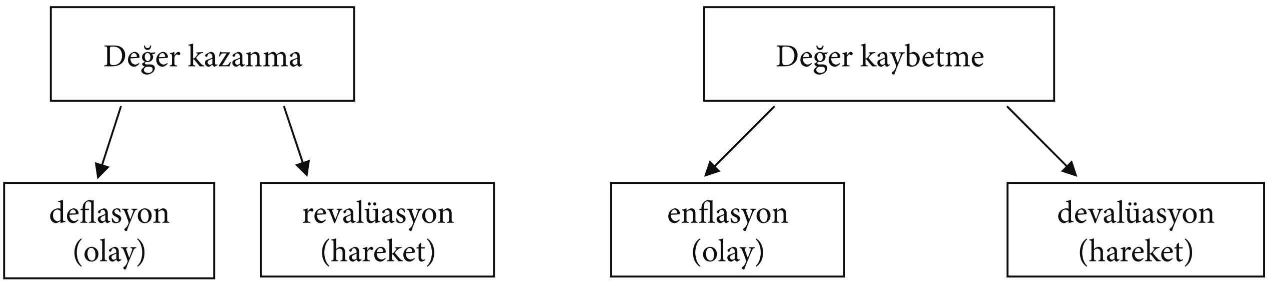
2.5. Paraların Değerlerindeki Değişmelerin Hesaplanması

Bir ulusal ekonominin durumu, iyiye ya da kötüye doğru daima değişmektedir. Ülkede üretim verimliliğinin genel seviyesinin artması durumunda, paranın resmi değerinde değişme olmadığına rağmen, ulusal paran biriminin iç piyasadaki alım gücü artar. Bu duruma **paranın değer kazanması** (apresiyasyon) denir.

Aksi takdirde, paranın resmi değerinde değişme olmadan, ulusal paranın iç piyasadaki alım gücü azaldığı duruma **paranın yıpranması** (depresyonu) denilir. Bu gibi olaylar daha uzun vadelerde meydana geldiği durumda enflasyon ya da deflasyon denilen olaylara götürür. Bu gibi durumlardan çıkış yolu, ulusal para biriminin yabancı paralara göre değerinin değişmesiyle sağlanabilir.

*Şek.*1

Ulusal para biriminin değerinin değişmesi



Fiyatların genel seviyesinin devamlı kontrolü, ulusal para biriminin kur değişimi gerekliliğini azaltmaktadır. Bu demektir ki, ulusal para biriminin diğer ulusların para birimlerine karşı değerinin azalması devalüasyon ve depresyon ile yapılabilir; ulusal para biriminin diğer ulusların para birimlerine karşı değerinin yükselmesi ise, revalüasyon ve apresiyasyon ile yapılabilir.

Ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında değerinin isteyerek belli bir amaca yönelik olarak bir aktı ile bir defaya mahsus olmak üzere düşürülmesine **devalüasyon** denir. Ulusal paranın **değerinin yıpranması** (depresyonu) ise, ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında ekonomi kanunlarının etkisiyle değerinin yavaş yavaş düşürülmesidir.

Ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında değerinin isteyerek belli bir amaca yönelik olarak bir aktı ile bir defaya mahsus yükselmesine **revalüasyon** denir. Ulusal paranın **değe-**

rinin yükselmesi (apresyiasyon) ise, ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında ekonomi kanunlarının etkisiyle değerinin yavaş yavaş yükselmesidir.

Deflasyon durumunda, ulusal ekonominin parasal kurumları, yabancı para birimlerine göre ulusal para biriminin değerini özel bir akt ile yükseltiyorlar (para biriminin revalüasyonu). Enflasyon durumunda, ulusal ekonominin parasal kurumları, özel bir akt ile yerli para biriminin resmi döviz kurunun değerini azaltıyorlar. Bu şekilde ulusal para biriminin yabancı para birimlerine göre değerini düşürüyorlar.

Bir ulusal para biriminin yabancı para biriminin güncel değerine göre, örneğin Amerikan dolarına göre euronun değeri, euronun dolara göre yükselmesi ya da azalması, euronun dolar karşılığında değeri hesaplanır.

1. Örnek, € / $ döviz kuru €1 = $ 0,93'ten €1 = $ 1,09 *o*larak değişirse, euro dolar karşılığında (1,09 – 0,93) / 0,93 = 17,20 % (apresyon) değer kazanmıştır denir.♦

Apresyon ve depresyonun hesaplanması için genel formül:

1)

$$\text{euronun yükselme ya da yıpranma değeri (miktarı)} = \frac{\text{euronun doların bazında yeni değeri- euronun dolar bazındaki eski değeri}}{\text{euronun dolar bazında eski değeri}}$$

2) Bir para biriminin yükselmesi (yıpranması) $X\,(€) = \dfrac{e_1 - e_0}{e_0}$ ile hesaplanır.

2. Yukarıdaki örnekte verilen (e_0 = \$ 0,93 ve e_1= \$ 1,09) değerleri yerine değiştirirsek, euronun dolara karşı % 17,20 yükseldiğini görüyoruz. ♦

Alternatif olarak, doların euro değerinin değişimini belirtebiliriz. Euronun dolar değerini "e" (dollars per euro) ile işaret edersek, o halde doların euro değeri (euros per dollar) çarpımsal ters ya da "1/e" olmalıdır.

3. Örnek, euronun değeri $ 0,93 ise, doların değeri EUR1,075 (1/0,93). ♦

0 ve t zaman aralığındaki doların euro değerinin değişimi $1/e_t - 1/e_0$'dır. Bu ifade, doların euro değerinin artışı (ya da azaldığı) kadar dolar euroya göre düştüğünün (ya da yükseldiğinin) yüzdelerle ifade edilişidir.

3)

doların yükselme ya da yıpranma değeri (miktarı) = $\dfrac{\text{doların euro bazında yeni değeri-doların euro bazındaki eski değeri}}{\text{doların euro bazında eski değeri}}$

4) Bir para biriminin yükselmesi (yıpranması) X ($)= $\dfrac{1/e_1 - 1/e_0}{1/e_0} = \dfrac{e_0 - e_1}{e_1}$ ile hesaplanır.

4. Yukarıda verilen 3) formülünün uygulanmasıyla euro döviz kurunun $0,93'ten $1,09 yükselmesi elde edilir. Bu ise doların %14,6 euroya göre düştüğünü göstermektedir [(0,917-1,075) / 1,075 = - 0,146]. ♦

Döviz kurlarının değişiminin yüzdelerle hesaplanmasında uygulanan kurallar:

- Pozitif yüzde değişim, yabancı para biriminin yükselmesi demektir;

- Negatif yüzde değişim, yabancı para biriminin düşmesi demektir.

Şekil.2

DÖVİZ KURU LİSTESİ

Kur listesi No.____________

Kurlar _____________200___ günü, saat 08.00 – 20.00'ye kadar geçerlidir.

DÖVİZ CİNSİ	ŞİFRE	PARA BİRİMİNİN İŞARETİ	BİRİM	EFEKTİF ALIŞ	EFEKTİF SATIŞ
AB	978	EUR	1		
AVUSTRALYA	036	AUD	1		
KANADA	124	CAD	1		
DANİMARKA	208	DKK	100		
NORVEÇ	578	NOK	100		
İSVEÇ	752	SEK	100		
İSVİÇRE	756	CHF	100		
İNGİLTERE	826	GBP	1		
ABD	840	USD	1		

Kaynak: Makedonya Cumhuriyeti Halk Bankası

Örneklerden görüldüğü gibi, euro döviz kurun dolara göre değişimi, dolar döviz kurunun euroya göre değişimiyle aynı değildir. Bunun sebebi şudur: euro yükselmesi (apresyonu), doların yıpranması (depresyonu) ile aynı değildir, çünkü bir para birimin değeri, diğer para birimin değerinin çarpımsal tersidir. Buna göre, hesaplamalarda kullanılan temel veriler farklı olduklarından ötürü para birimlerin değerlerinin yüzdelik değişimleri farklı olur.

Alıştırmalar

1. Paranın depresyonu (yıpranması) kavramını açıklayınız.

2. Devalüasyon nedir?

3. Paranın yükselmesi (apresyonu) kavramını açıklayınız.

4. Revalüasyon nedir?

5. Bir gün zarfında euro / dolar kuru 1,45'ten 1,53'e değişmiştir. Euronun değişimini (euronun yükselişini) yüzdelerle hesaplayınız; doların değerinin yüzde değişimini de hesaplayınız.

6. Denar, euroya göre değerini ayarlayarak bir kere mahsus olmak üzere 61,5'ten 90'a değer değiştirmiştir. Nasıl değişim söz konusudur ve yüzde kaçtır?

7*. İsviçre frangı euroya göre %4 değer kazanmıştır. Önceki kur EUR/CHF 1,33 olduğuna göre, şimdiki kur ne kadardır?

2.6. Döviz Kavramı

Bir ulusal ekonominin yabancı devletlerdeki parası iki şekilde bulunuyorlar: **efektif yabancı paralar** *(***foreıgn curency***)* ve yabancı para birimlerinde kısa vadeli alacaklar **dövizler (foreign exchange).**

Döviz kavramı etimolojik olarak yeni Latinceden, daha doğrusu İspanyolca "**devisa**" (yabancı çek, onun birincil anlamı yabancı para biriminde ödenecek fatura daha doğrusu yabancı devlette ödenecek fatura) sözünden kaynaklanır. Genellikle dövizlere "yabancı piyasalara giriş biletleri" ve onlar aynı zamanda yabancı devletlerde satın alım gücünün belgesidir denilebilir. Bu demektir ki, yabancı döviz sakini, yabancı devletten alacaklı gibi, yabancı para biriminde dövizlerin alıcısıdır. Ya da örneğin yerli sakin, yabancı devlete yaptığı ihracatın karşılığı olarak döviz olarak yabancı para biriminde değerli kağıt alır ve onunla yabancı devlette mal satın alabilir.

Dövizler, yabancı para biriminde kısa vadeli alacaklar gibi, Finansal pazarın bir alanı gibi, döviz piyasasında satılan ve satın alınabilen özel bir maldır. Döviz sahibine (yerli rezident-oturan) dövizler para değildir, çünkü onları ancak döviz pazarında sattıktan sonra ya da bir bankaya götürdükten sonra yerli para elde edecektir.

Döviz kavramı, daha dar veya daha geniş anlamda tanımlanabilir.

Dar anlamda döviz, herhangi bir yoldan elde edilmiş kısa vadeli tüm yabancı paralar ve bu para cinsinden değer taşıyan menkul değerlere verilen isimdir. Bu tanımı devletlerden çoğu benimsemiştir.

Daha geniş anlamda dövizin tanımında, dar anlamdaki tanımdan başka, rezidentlerin (oturanların) sahip oldukları efektif yabancı parasal araçlarını da içerir. Bunun açıklaması şudur: Merkez bankanın yaydığı bu parasal araçlar, yerli rezidentlerin merkez bankasından alacaklarıdır.

Makedonya Cumhuriyeti'nde dövizin geniş anlamdaki tanımı kabul edilmiştir. Bu demektir ki, yabancı devletlerde o devletin para birimi adında kısa vadeli alacaklar ve altın paralar hariç, tüm yabancı efektif parasal araçlar döviz sayılır.

Dövizler, yabancı ülkelere ödeme yapmaya yarayan her çeşit araçtır. Bu anlamda yazılı parasal araçlar konvertibl para rejimlerinde döviz olarak kullanılırlar. Döviz kelimesinin geniş anlamda kullanılışında, özellikle bankacılık uygulamalarında nakit yabancı paralara karşılık olarak, bu gibi para yerine geçen ödeme araçlarına da döviz denmektedir. Bu tanımdan hareket ederek, siyasi - ekonomi açısından serbest ve bağlı dövizler olmak üzere iki gruba ayrılıyorlar.

Serbest dövizler, diğer devletlerin paralarına serbestçe ve kolaylıkla çevrilebilen dövizlere, konvertibl döviz ve yapılan bu işleme konvertibilite denir. Uluslararası işlemlerde genelde kullanılan döviz, konvertbil dövizdir. Bir ülkenin parası diğer bir ülkenin parasına dünyanın her yerinde serbest bir şekilde çevrilebiliyorsa o milli para için "tam konvertibl" denir. Dolayısıyla Konvertibl olan milli paralar uluslararası ödeme aracı olarak kullanılırlar.

Bağlı dövizler, yabancı devletlerde, yabancı ödeme araçlarıyla kısa vadeli alacaklar. Bunlar, sadece anlaşma üzere yapılan ödeme çeşitleriyle sağlanabilir. Bağlı dövizlerin sahipleri tarafından kullanılışı sınırlıdır. Bunlar genellikle konvertibil olmayan, zayıf, yumuşak ve klirink dövizlerdir.

Birinci açıdan, konvertibl olan milli paralar uluslararası ödeme aracı olarak kullanılırlar. Çünkü konvertibl bir paraya sahip olan bir ülke bunu istediği anda diğer bir paraya kolaylıkla çevirebilir. Parası konvertibl olan ülke, dünya ticaretinde bir Merkez Bankası gibi rol oynar ve ödeme aracı olarak emisyonda bulunmak suretiyle bu işten kar bile elde edebilir. Konvertibilite sonuçta, bir ülkenin ulusal parasının, değişim aracı olma, hesap birimi olma, borç ödeme ve birikim aracı olarak kullanılma gibi işlevlerini, ülke sınırları dışında da gerçekleştirmesidir. Dövizlerin böyle bir özelliği yoksa, onlara bağlı dövizler denilir. Aslında bunlar konvertibil olmayan alacaklardır. Böyle dövizler uluslararası ticaret ve sermaye akımlarının gerçekleştirilmesinde serbest olarak kullanılamıyorlar, ancak iki devlet arasında yapılan anlaşmalara göre ödemeler yapılabilir. Aslında bu dövizlerin serbest akımı yoktur ve birinden diğerine geçme imkanı da yoktur.

Dönüştürme yapma (konverziyon) kabiliyeti açısından dövizler: konvertibil, konvertibil olmayan ve klirink olabilirler. **Konvertibil dövizler**, yabancı para biriminde olan kısa vadeli ve önceden belirlenen pariteye göre farklı dövizlere ya da efektif parasal varlıklara dönüştürme imkanı olan alacaklardır. Konvertibilite, tam veya sınırlı olabilir.

Halbuki, başka dövizlerle ya da yabancı efektif parasal varlıklarla dönüştürülmesi mümkün olmayan dövizler **konvertibil olmayan dövizler** söz konusudur.

Klirink dövizler, alıcı–verici ikili anlaşmalarda kliring yoluyla ödemelerde rastlanılır. Bu gibi alış verişte pozitif saldo, ancak negatif saldoda olan partnerin devletinde satın alımla dengelenebilir. Pozitif saldoyla gerçekleşen dövizleri üçüncü bir ülkede takaz yaparak dengeleme imkanı yoktur.

Teslimat vadesine göre dövizler, **spot** ve **vadeli** (temrinli) gibi iki cinsten olabilirler.

Spot dövizler, anında teslim kaydıyla yatırılan dövizlerdir. Bu durumda adı geçen dövizin cinsine bağlı, kullanma rejimine dikkatli olunması zorunluluğu vardır.

Vadeli dövizler, anında yatırılmış dövizler değildir. Bu gibi dövizlerin teslimi için, önceden yapılan sözleşmeye göre belli bir vadenin geçmesi gerekir. Bu gibi dövizlerin satın alışı, genellikle kur dalgalanmalarının risklerinden korunmak için ya da sadece spekülasyon amaçlı kur farklarından kazanmak için yapılabilir.

Alıştırmalar

1. Dar ve geniş anlamda döviz kavramını tanımlayınız.

2. Döviz ve ulusal para birimi arasındaki farkı açıklayınız.

3. Konvertibilite açısından dövizler ayrılışı.

4. Spot ve vadeli dövizleri açıklayınız.

5. Klirink dövizler, kavramı ve önemi.

2.7. Döviz Kurun Kavramı ve Aslı

Döviz kuru, bir birim yabancı paranın ulusal para cinsinden fiyatıdır.

Buna göre, her yabancı para ya da yabancı para cinsinden kısa vadeli her alacak, ulusal piyasada dövizdir ve kendi fiyatı, yani döviz kuru vardır.

Döviz kurunu, döviz (para birimi) paritesinden ayırmalıyız, çünkü döviz paritesi ulusal paranın değeri daha geniş ortak payda (deminator): altın, herhangi bir istikrarlı para vb. ile karşılaştırarak resmi olarak tespit edilir. Normal şartlarda döviz kuru, taban gibi döviz paritesi etrafında seyreder.

Aslında, döviz kuru ulusal paranın yabancı paraya göre fiyatıdır, ya da diğer sözlerle, bir birim yabancı para için, ulusal paradan kaç birim para verilmelidir anlamındadır. Kurun bu şekilde ifade edilişine. Kurun bu şekilde ifade edilişine **doğrudan kotasyon** sistemi denir.

Dolaylı kotasyon sistemi ise sadece İngiltere devletinde (ve onun bir zamanki kolonileri olan devletlerde) uygulanmaktadır. Burada döviz kuru, bir yerli para birimi için, yabancı para biriminden kaç birim ödenmesi gerekir biçiminde tanımlanır.1

Nominal döviz kuru, *enflasyon katsayısını hesaba koymadan,* **y**abancı paranın ulusal para cinsinden fiyatına denir.

Reel döviz kuru, nominal kurların iç ve dış enflasyon oranlarına göre ayarlanmış şekline denir. Bu ise çok önemlidir, çünkü enflasyon para biriminin değerini yitirir, yani onun satın alım gücünü azaltır. Nominal kurun enflasyon oranlarına göre ayarlanmasıyla adı geçen para biriminin satın alım gücünün daha reel değeri görünür.

---

[1] Doğrudan hesaplama, yabancı para biriminin 1 ya da 100 birimi, ulusal para birimiyle ifade edilir (1 EUR = 61 denar) . Dolaylı hesaplamada ise, yerli para biriminin 1 ya da 100 birimi yabancı para birimi ile ifade edilir (100 denar = 1,80 EUR).

Efektif döviz kuru, ülkenin ticari ilişkide bulunduğu ülkelerin paralarındaki değişmelerin ülkenin döviz kurlarına yansıtılması yoluyla elde edilir.

Efektif paraların sahte olma imkanı olduğundan, bankalar pratikte efektif döviz kurunu özel olarak gösteriyorlar. **Efektif döviz kuru**, genellikle dövizlerin kurlarından daha alçaktır. Bunun nedeni, sahte olma riski ve devletten devlete transfer harcamalarıdır.

Uluslararası her işlem iki satın alımla yapılır. Uluslararası alışverişte malın satın alınması ve para biriminin satın alınmasıdır. Bunu şu şekilde izah edebiliriz: X devletinden ithalatçı, Y devletinden ithal yaparsa o, Y devletinde sadece mal değil, para birimi de satın almak mecburiyetindedir. Bu şekilde şu sonuca varıyoruz: Uluslararası alışverişte sadece malların fiyatları değil, ulusal para birimlerinin de fiyatları oluşmaktadır.

Bunu şu bağıntılarla gösterebiliriz:

a) İhracat için: $Ei = Qi\ .\ pi\ .\ T$, yani bir malın ihracat değeri, mal miktarı, yabancı döviz piyasasındaki fiyatı ve yabancı para biriminin kuru ile çarpımına eşittir.

b) İthalat için: $Ui = Qi\ .\ pi\ .\ T(1+ti)$, yani bir malın ithalat değeri, mal miktarı, satın alındığı pazar fiyatı ve ithalat masraflarıyla $(1 + ti)$ arttırılmış yabancı para biriminin kuru ile çarpımına eşittir.

Bazı durumlarda, dövizler ve para birimlerinin kurları, **uluslararası para kuru** ortak adıyla ifade ediliyorlar.

Uluslararası para kuru, bir devletin efektif paraları diğer bir devletin efektif parasıyla değiştirme fiyatıdır.

Her para biriminin bir paritesi vardır, yani kur fiyatı vardır ve bu fiyat uluslararası para kurunun dayanış noktasıdır.

Döviz kurları, döviz piyasasında, döviz arz eden ve döviz talep edenlere göre oluşur. Dövizlere arz ve talep ödeme bilançosu durumunu ifade etmektedir. Ödeme bilançosundaki açık (defitsit), döviz talebi döviz arzından büyüktür demektir. Ödeme bilançosundaki fazla (sufitsit) ise döviz arzı döviz talebinden büyüktür demektir.

Alıştırmalar

1. Döviz kuru nedir?

2. Doğrudan kotasyonu açıklayınız.

3. Dolaylı kotasyonu açıklayınız.

4. Nominal, reel ve efektif döviz kuru, kavramı ve anlamı.

5. Uluslararası para kuru nedir?

2.8. Spot İşlemler

Döviz piyasasında temel işlem **spot sözleşmesidir.**

Bir para birimini diğer para birimiyle alış veya satışının işlem tarihinde belirlenen fiyat üzerinde en çok iki iş günü sonrasında gerçekleştirildiği işleme **spot işlemi** denir. Bu esnada işlemin yapılması için gereken evraklar hazırlanır ve efektif transferin yapılmasına imkan sağlanmış olur.

Spot işlem, bir para biriminin diğer para birimiyle anında değiştirmedir. **Spot döviz kuru,** anında geçerlilikte olan kur ya da sözleşmeli pazar fiyatıdır. Spot işlemler, aslında ödemenin hemen yapılacağı anlamında değildir. Uluslararası anlaşmaya göre, ödeme tarihi ya da değer tarihi (settlement date, value date) taraflar arası alış verişin yapıldığı günden (second busines day after the "deal date" or "trade date") iki iş günü sonrasına kadar gerçekleşebilir. İki gün vade, her iki taraf (arz eden ve talep eden) için gereken evrakların hazırlanması, banka hesaplarının dengelenmesi gibi işlemlerin yapılması için yeter bir süredir.

Müstesna, Kanada doları (CAD) ve ABD doları (USD) arasındaki spot işlemlerin vadesi alış veriş yapıldığı günden sonra sadece bir gündür (çünkü Kanada ve ABD aynı zaman diliminde bulunuyorlar).

Tekrarlayalım, spot işlem alış veriş gününden sonra iki iş günü geçerlidir.

Spot işlemler, bir para birimin diğer bir para birimiyle doğrudan alış verişidir ve bu alış veriş yapıldığında, para transferi iki devlet arasında geçerli olan ödeme sistemleri doğrultusunda gerçekleşir.

Tipik bir spot işlem örneği, New York'tan bir A bankası 1 haziranda Frankfurt'tan bir B bankası ile euro karşılığı 10 milyon dolar satmak için kur fiyatı 3 haziran örneğin bir dolar için 0,785 EUR olmak üzere anlaşma yapılmıştır. 3 haziranda B bankası Almanya'da, A bankasının hesabına 7,85 milyon EUR ödeyecek, A bankası ise aynı günde ABD'de B bankasının hesabına 10 milyon dolar ödeyecektir. Her iki tarafın bankalara parayı ödemekle işlem tamamlanmış olur.

Döviz pazarında her **para birimi için iki fiyat vardır** – fiyatlardan biri, belli bir para birimini satıcının satmak istediği fiyat ve ikincisi, satın alanın satın almak istedikleri fiyattır (alış ve satış kuru). Pazar sunucusundan her iki fiyatı sunması beklenilir bununla (making a market) pazarı oluşur.

Spot kurlarda, kurların kotasyonunun bilinmesi önemlidir. Daha doğrusu, doğrudan ve dolaylı kotasyon, Avrupa ve Amerika koşulları vb.

Bir para biriminin fiyatı gibi, bir döviz kurunun diğerine göre kotasyonu iki şekilde görülmektedir: ulusal para biriminin, yabancı para birimine göre değeri doğrudan kotasyondur (örnek, ABD'de dolar, ya da Makedonya için denar); yabancı para biriminin yerli para birimine göre değeri dolaylı kotasyondur (ABD'den iseniz dolar, ya da Makedonya için denar).

"Amerika koşulları" (Amerikan terms) ifadesi, ABD'de bulunan birine göre kotasyon. Bu ise dolar için şu demektir: yabancı para biriminin değişken değerinin dolar karşılığının seyridir (örnek 1,27 dolar bir EUR için).

"Avrupa koşulları" ifadesi, Avrupa'da bulunan birine göre kotasyon. Bu ise dolar için şu demektir: yabancı para biriminin bir dolar için değişken seyridir (ya da $1 için EUR 0,785).

1978 yılında döviz pazarı, küresel pazara entegre olduğunda, kolaylık olmak için, ABD'deki pazar pratiği de Avrupa düzeniyle uyum sağlamak için komisyoncuların girişimi üzere değiştirildi.

Bu şekilde OTC pazarı Avrupa şartlarına göre her devlette doları hemen de her para birimine göre seyrini belirlemektedir (yani, yabancı paranın 1$ karşılığındaki değeri). Buna göre, hemen de her zaman dolar taban para birimi olarak (base kurrence) kabul edilmiştir. Bir birim ($1), yabancı para biriminin değişen değeriyle satın alınır ya da satılır.

Bu genel kuraldan istisnalar da olabilir, yani dünyada tüm OTC pazarlarında İngiliz sterlini temel para birimi gibi hala seyretmektedir. Dolayısıyla, dünyanın her yerinde piyasa yapıcıları ve komisyoncuları funta sterlini (GBP), bir sterline x dolar kurunu belirliyorlar. İngiltere, 1971 yılına kadar ondalık para birimi sistemini kabul etmemişti. Bu durumda, değişen miktarlarda yabancı para birimlerini sterline çevirme ve pazarlama, matematiksel açıdan daha kolay yapılabilirdi. GBP ile tarihsel bağları olan bazı para birimleri (İrlanda, Avustralya ve Yeni Zelanda para birimleri) OTC pazarında, sterlin gibi kur belirliyorlar (bir birim için, değişik miktar Euro).

Düz ve dolaylı kur belirleme, birbirinin çarpımsal tersidir ve biri diğeriyle kolay belirlenebilir.

Her döviz işlemi iki para birimi kapsamında yapılır. Burada önemli olan para birimlerinden hangisi **temel para birimidir** (Base Currency, kotasyonlu, sabitleşmiş) ve hangisi **koşullanmış para birimidir** (Terms Currency) ya da hesaplanan (counter currency).

Genel olarak, iki para birimi arasındaki döviz kuru (Exchange rate), örneğin USD ve JPY arasında döviz kuru USD/JPY biçiminde yazılır. Burada 1 USD'a karşılık JPY sayısı anlamındadır. JPY/USD ise 1JPY karşılığında USD sayısını ifade eder.

Para biriminin sol tarafında yazılan kod, temel para birimidir ve daima birimdir.

Para biriminin sağ tarafında yazılan kod, değişken para birimine aittir (koşullu, hesaplanan birim ya da kur ayarlı - kotasyonlu para birimi). Kur fiyatına göre, bu paranın birim sayısı, temel paranın bir birimine eşittir.

Temel para birimi daima sol tarafta yazılır. Örneğin NOK/DKK oranı, bir NOK birimine karşılık gelecek DKK sayısı.

1. CHF / DKK kuru 4,1235'tir. 1 milyon CHF satın alıyorsak kaç DKK ödemeliyiz? 4,1235 sayısı, 1 CHF için DKK sayısını gösterir. Buna göre, 4 123 500 DKK ödemeliyiz:

1 000 000 . 4, 1235 = 4 123 500. ♦

2. Şimdi tersine, DKK 1 milyon için ne kadar CHF gerekir hesaplayalım (CHF / DKK kuru 4,1235). Bu durumda CHF 242 512,43 elde edilir.

1 000 000 : 4,1235 = 242 512,43. ♦

Değişen para birimi pay, temel para birimi ise paydadır. Pay arttığı durumda, temel para birimi artar, yani kuvvetleşir – pahallılaşır. Pay azaldığı durumda, temel para birimi zayıflaşır ve daha ucuz duruma gelir. Sözlü ifadede temel para birimi daima ilk söylenir.

Dolar/Yen (USD/JPY) kur ayarında, dolar temel para birimi ve paydadır, yen ise değişken ve paydır. Para birimlerden bazılarının takma adları da vardır (Paunt – Cable, İsviçre frangı – Swissie, Avustralya doları – Aussie). GBP / USD kurunun takma adı Cable'dir.

Piyasa yapıcısının (market–maker) kur ayarlamaları, daima onun görme noktasındandır (satın aldığı temel para biriminden alış fiyatı, ve temel para birimi için satış fiyatı).

Piyasa yapıcısına USD/CHF kuru sorulunca, 1,4975 – 85 biçiminde cevaplayabilir. Bununla, CHF'in alış fiyatı bir dolara 1,4975 ve satış fiyatı bir dolar için 1,4985 olduğunu anlıyoruz. Genellikle, piyasa yapıcısı kur ayarını 75 – 85 aralığında ifade eder, çünkü, büyük sayı ("big figure") 1,49 olduğunu müşterinin bildiğini var sayar. Kurun alış fiyatı daima sol taraftan ilkidir ve satış fiyatından daima küçüktür (sağ taraftakinden). Aralarındaki farka, marj ya da bant (spread) denir.

Alış ve satış kur fiyatlarının ayarı dört ondalık basamağı kesinliğiyle ifade ediliyorlar, bu ise değişken para biriminin %1'in yüzde biridir, yani 1/10 000'dir ve ona *pips* denir. Mutlak değeri küçük olan bazı para birimlerinde, örneğin yenin kur ayarı, iki ondalık basamağı kesinliğiyle ifade ediliyor ve burada pips değişken para biriminin 1/100'üdür. Her para piyasasında pips ya da tik fiyat değişiminin en küçük değeridir.

Alıştırmalar

1. Spot işlem nedir?

2. Spot döviz kurunu açıklayınız.

3. Temel para birimi nedir, koşullanmış para birimi nedir?

4. Dolar ile 100000 EUR satın alıyoruz (kur: EUR/USD 1,44). Kaç dolar ödemeliyiz?

5*. Euro ile 100000 USD satın alıyoruz (kur: EUR/USD 1,46). Kaç euro ödemeliyiz?

2.9. Spot Kurları Nasıl Ayarlanır

Euro bazında (EUR) kur ayarlaması yapıldığında, bankalar arası piyasada, birçok para birimlerinin kur ayarları, 1 EUR karşılığı para birimlerinin farklı miktarları gösterilme pratiği vardır. Diğer sözlerle, bir ya da iki para birimi olduğunda EUR temel para birimidir.

Benzer şekilde EUR dışında, bankalar arası sözleşmeye göre, tüm para birimlerinin, USD bazında kur ayarlamaları yapılır.

Herhangi iki konvertibil para birimi arasında diling yapılabildiğine rağmen, örnek: EUR'a göre NZD'ya da JPY'a göre CHF; tarihsel olarak bankalar arası piyasada en çok kur ayarı USD'ye göre, yani dolar bazında kur ayarlamaları yapılır. Bununla paralar arası birçok kur ayarı atlatılmış olur. USD olmayan herhangi iki para biriminin döviz kurları dolar bazından hesaplanabilir.

USD dışında herhangi iki para biriminin kurları **çapraz kur** *(***cross-rate***)* diye ifade edilir.

Günümüzde, çapraz kur denilince, birden fazla ulusal paranın aralarındaki kurların bir anahtar para cinsinden hesaplaması anlaşılmaktadır. Örnek, GBP / SEK kuru, EUR/GBP ve EUR/SEK kurlarını kullanarak hesaplanabilir.

Çapraz kurlarla pazarlama (Cross Rate Trading) paraların değiş tokuşu gibi algılanabilir ve bu pazarlamada dolar ne temel ne de değişken para birimi değildir. Örnek, EUR/JPY kurunda EUR – temel, JPY- değişken para birimidir.

Piyasada işlem yapan bankalar ve diğer ilgili kurumlar tarafından verilen kotasyonlar, biri alım **(bid rate)** diğeri ise satım **(ask rate)** olmak üzere çift taraflıdır. Alış kurları satış kurlarından daha düşüktür. Yani banka ve diğer aracı kurumlar, dövizi düşük fiyattan alıp, yüksek fiyattan satmaktadırlar

3. Banka USD doları 1,4375 CHF satın alır ve USD doları 1,4385 CHF satıyorsa, USD/CHF kursu 1,4375/1,4385 şeklinde seyredecektir. ♦

Kotasyonun iki tarafındaki farkı, marj ("spread") olarak adlandırılır.

Piyasada döviz kurlarına ilişkin verilen alış ve satış kotasyonlarında, alış kotasyonları her zaman satış kotasyonlarından daha düşük olarak gerçekleşir. Alış (bid) ve satış (offer) kotasyonları arasındaki farkı gösteren bandın (spreat) geniş veya dar olması, kimin alım-satım işlemi yaptığına ve alım-satım yapılan miktarın büyüklüğüne göre değişim göstermektedir.

Çarpımsal ters kurlar da vardır. Temel para birimi sayılan herhangi para biriminin kotasyonu, değişken para birimi olarak kendi çarpımsal tersi biçiminde kendine denk kotasyona dönüştürülebilir.

4. 1,4375/1,4385 kotasyonunda USD/CHF kuru, CHF/USD biçiminde (1:1,4375) / (1:1,4385) kotasyonuna dönüştürülebilir. Değerler ne olursa olsun, küçük sayı solda yazılarak kotasyonun her iki tarafı birbirinin tersidir: 0,6952/0,6957. İkinci durumda bandın solundaki fiyatla banka değişken para birimine göre temel para birimini satın alıyor, sağdaki fiyatla da satıyor. ♦

*K*urlar genellikle centin $\frac{1}{100}$ (yüzde biri) biçiminde kotlanıyorlar.

Bu değer puan ya da pip diye adlandırılır. Örnek USD/CHF kuru, genel olarak dört ondalık basamaklı sayı -1,4375/1,4385 biçiminde ifade edilir. Ondalık basamaklar sayıların büyüklüğüne bağlıdır. USD/JPY durumunda anlaşmaya göre 2 ondalık basamağı kullanılır. USD/JPY kotasyonu 105,05/105,15; burada 15 puan 0,15 JPY demektir ve her iki durumda 1 puan, kotlanmış ondalık sayının son basamağındaki birimdir.

5. USD/CHF kurunda pazarlama yaparken USD 1 000 000 miktarında bir puanın değeri CHF 100 olur. Diğer sözlerle, döviz kuru bir puan değiştiğinde pazarlamanın kâr ya da zararı CHF 100'dür. Yani

1 000 000 . CHF 0,0001 = CHF 100. ♦

Puan (point), *döviz kurunun ondalık basamaklarının son basamağındaki birimdir. Döviz kuru genellikle puanlarla ya da pipslerle kotlanıyorlar, en sık son iki basamaktaki sayı ile ifade edilir. Büyük rakamlar (big figure), puanlar hariç döviz kurunun ilk kısmıdır.*

Alıştırmalar

1. Alış - satış kurunu açıklayınız.
2. Çapraz kur nedir?
3. Pips nedir?
4. Marj - band (spread) nedir?

5*. EUR/USD kuru 1,44 – 1,46'dır. Bunun çarpımsal ters kurunu gösteriniz.

2.10. Kâr ve Zarar

Her bankanın amacı kâr sağlamaktır. Bu nedenle paralarla alış satış işlemleri yaparken daima temel para birimini, değişken para birimine göre mümkün olduğu kadar en pahalı satmak ve aynı parayı en ucuz fiyata almayı amaçlar.

1. *USD/CHF kuru 1,483/1,485„ūir.*

Alış veriş 1: Banka 1,4830 kuruyla CHF karşılığında USD 1 000 000 satın almıştır.
Alış veriş 2: Banka 1,4855 kuruyla CHF karşılığında USD 1 000 000 satmıştır.
Para akışı nakit (cash flows)

	USD	CHF
Alış veriş 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 483 000
Alış veriş 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 485 500
Net sonuç:		+ CHF 2 500

Banka CHF 2 500 kâr yapmıştır. ¨

2. Spot USD/CHF 1,5835 durumunda CHF para birimiyle USD 1 milyon satın alıyoruz. Daha sonra aynı gün spot kotasyonu USD/CHF 1,5836 olduğu an USD 1 milyon satıyoruz. Bununla 1 puan kâr elde ediyoruz.

Para akışı nakit (cash flows)

	USD	CHF
Alış veriş 1:	+ USD 1 000 000	- CHF 1 583 500
Alış veriş 2:	- USD 1 000 000	+ CHF 1 585 600
Net sonuç:		+ CHF 100

Buna göre, USD/CHF kotasyonunda dil ile (anlaşmayla) USD 1 milyonda 1 puanın değeri CHF 100'dür. ♦

3. USD/JPY spot kuru 118,35 durumunda JPY para birimiyle USD 1 milyon satın alıyoruz. Daha sonra aynı gün spot kotasyonu USD/JPY 118,36 olduğu an USD 1 milyon satıyoruz. Bununla 1 puan kâr elde ediyoruz.

Para akışı nakit (cash flows)

	USD	JPY
Alış veriş 1:	+ USD 1 000 000	- JPY 118 350 000
Alış veriş 2:	- USD 1 000 000	+ JPY 118 360 000
Net sonuç:	:	+ JPY 10 000

Buna göre, USD/JPY kotasyonunda dil ile (anlaşmayla) USD 1 milyonda 1 puanın değeri JPY 10 000'dir. ♦

Alıştırmalar

1. EUR/CHF kuru 1,32 – 1,34'tür. Bu kura göre, verilen bantta 20 000 CHF alınmış ve satılmışsa, ne kadar kâr elde edilmiştir?

2*. Bir kişi, satış fiyatı 61,70 MKD kuruyla 10 000 EUR satın almıştır. Bir vakit geçtikten sonra alış fiyatı 61,40 MKD kuruyla 10 000 EUR satmıştır. Net sonuç nedir?

2.11. Pozisyonda Tutunma

Pazarcı her an nasıl pozisyonda olduğunu bilmesi gerekir (pozisyonda tutunma – position keeping) – bir günde yaptığı pazarlama işlemlerinin net sonucu (bilançosu). Bulunduğu noktada kazançlı olup olmadığını tespit etmek için o geçerlikte olan anındaki döviz kuruyla karşılaştırma yapmak için pazarcı, aynı zamanda kendi net – pozisyonunun **ortalama döviz kurunu** bilmesi gerekir. Pazarcı, gün sonunda pozisyonunu kapamak mecburiyetinde değildir, fakat böyle durumda o ana kadar pozisyonunun **marking to market durumunu**, yani **gerçekleşmeyen kazancı ya da zararı** hesaplamalıdır. Bunu belirtmek için gün sonunda sanki pozisyonu kapatmış olduğunu sayarak, geçerlilikte olan kur (current rate) ile kazancın ya da zararın ne kadar olduğunu hesaplamakla belirtir.

1. USD/CHF ile 3 spot pazarlama şu şekilde yapmışsınız:

USD 4 milyon 1,6723 kuruyla satış;

USD 1 milyon 1,6732 kuruyla alış;

USD 5 milyon 1,6729 kuruyla alış;

Piyasa USD/CHF 1,6730 kuruyla kapanmıştır.

Pozisyonunuz nasıldır? Bu pozisyonun ortalama kuru nedir? Sizin net kazancınız ya da zararınız ne kadardır?

	USD	CHF
	- 4 000 000 kur 1,6723	+ 6 689 200
	+ 1 000 000 kur 1,6732	- 1 673 200
	+ 5 000 000 kur 1,6729	- 8 364 500
Pozisyon	+ 2 000 000	- 3 348 500

$$\text{Ortalama kur}: \frac{3\,348\,500}{2\,000\,000} = 1{,}67425,$$

	- 2 000 000 kur 1,6730	+ 3 346 000
Zarar:		- 2 500

Pozisyon, fazla alınmış olan USD 2 milyondur. Ortalama kur 1,67425, zarar: CHF 2 500. Zarar, USD konvansiyonu spot kur ile USD bazında da gösterilebilir, ya da karşılığındaki spot kuruyla herhangi bir para birimiyle gösterilebilir.

Alıştırmalar

1. Saat 10'da EUR/NOK spot kuru 7,44'tür (kotasyon 100 NOK içindir). Bu kur ile NOK 500 000 satıyoruz, saat 14'te ise EUR/NOK kuru 7,66 olur. Saat 19'da yeni bir düzenleme ile EUR/NOK kuru 7,35 oluyor. Her iki terminde kâr ya da zararı gösteriniz.

2. USD/CHF ile 3 spot alışveriş şu şekilde yapılmıştır:

USD/CHF 1,041 kuruyla CHF 100 000 satın alınmıştır.

USD/CHF 1,038 kuruyla CHF 200 000 satılmış;

USD/CHF 1,039 kuruyla CHF 300 000 satın alınmıştır;

Piyasa USD/CHF 1,045 kuruyla kapanıyor.

Pozisyon nasıldır? Bu pozisyonun ortalama kuru ne kadardır? Net kazanç ya da zarar ne kadardır?

3. USD alış fiyatı 49,50, satış fiyatı ise 50,00'dır. 200 USD alım satımında kâr ne kadardır?

4. EUR/USD 1,40 kuruyla USD ile 100 000 EUR satın alınmıştır. Şimdiki kur EUR/USD 1,23'tür. Euroları şimdi sattığımızda zarar ne kadardır?

5. Saat 10'da, EUR/AUD 1,44 kuruyla 100 000 AUD satın alınmıştır. Saat 12'de kur 1,45, saat 15'te ise 1,437 olmuştur. Kazançlı çıkmak için Avustralya dolarları hangi anda satılmalıydı?

2.12. Konuyu Pekiştirme Alıştırmaları

1. 820‰ altının saflığını, İngiliz usulüne göre ifade ediniz.

2. *W* 7,,2,4 altının saflığını milyem (binde) biçiminde ifade ediniz.

3. *W* 10,,12 gümüşün saflığını milyem (binde) biçiminde ifade ediniz.

4. Kütlesi 600 gram ağırlığında olan bir gümüş nesnede 480*g* saf gümüş vardır. Gümüşün saflığını:

a) milyemlerle; b) İngiliz usulüne göre

ifade ediniz.

5. *B* 1,,2 saflığında bir altın nesnede 120*g* saf altın vardır. Nesnenin toplam kütlesi ne kadardır?

6. Saflığı 750‰ olan bir gümüş nesnede 22*g* saf gümüş vardır. Eşyanın toplam kütlesi ne kadardır?

7*. Saflığı 900‰ olan 500*g* altından ve saflığı 850‰ olan 750*g* altından yapılmış bir altın nesnenin saflık derecesini hesaplayınız.

8*. 100*g* saf gümüş, 100*g* bakır ve saflığı 204 peniveyt olan 500*g* gümüşten yapılmış olan eşyanın saflığını (arılık derecesini) hesaplayınız.

9. Dolar/frank kursu bir günde 1,21'den 1,23'e değişmiştir. Doların değişimini (artışını) yüzde olarak ifade ediniz. Aynı zamanda frankın değişimini yüzdelerle ifade ediniz.

10. Denar, dolara karşı değerini kademeli olarak 61,5'ten 75'e değiştirmiştir. Nasıl değişim söz konusudur ve bunun yüzdesi ne kadardır?

11. *EUR,* İsviçre frangına göre %5 değer kazanmıştır (önceki kur EUR/CHF 1,33). Şimdiki kur ne kadardır?

12. Saat 10'da spot kur EUR/USD 1,44'tür. Bu kurla USD 5000 satıyoruz. Saat 14'te EUR/USD 1,46 ve saat 19'da kur EUR/USD 1,43 olmuştur. Her iki terminde kâr ya da zararı hesaplayınız.

13*. EUR/AUD ile 3 spot pazarlama şu şekilde yapılmıştır:

1,622 kuru ile AUD 100 000 satın alınmıştır
1,632 kuru ile AUD 300 000 satılmıştır
1,641 kuru ile AUD 600 000 satın alınmıştır
Pazar 1,635 ile kapanmıştır.

Pozisyonunuz nasıldır? Bu pozisyonun ortalama kuru ne kadardır? Net kâr ya da zarar ne kadardır?

Konu Özetleri

Altın, gümüş, platin, cıva, rutenyum, rodyum, osmiyum, paladyum ve iridyum elementleri **kıymetli metallerdir**.

İki ya da daha çok metalin karışımına **filiz** denir. Filizdeki kıymetli metalin kütlesine **saf kütle** de denir, filizin kütlesine ise **toplam kütle** de diyeceğiz.

Bir filizde bulunan kıymetli metalin kütlesi ve filizin toplam kütlesinin oranına, kıymetli metalin **saflık** (**arılık**) **derecesi**, ya da **saflığı** denir. Kıymetli metalin saflığı, **milyem** ve **İngiliz usulü** olmak üzere iki şekilde ifade edilmektedir.

Filizin toplam kütlesini *m*, saf kütleyi m_b ve saflık derecesini *f* ile işaret edersek, kıymetli metallerin saflık (arılık) derecesini şu formülle ifade edebiliriz:

$$\boxed{f = \frac{m_b}{m} \cdot 1000\ ‰}$$

İngiliz usulü ile ifade edildiğinde, altının saflık derecesi **karat (ayar)**, gümüşün saflık derecesi **peniveyt (gümüş ayarı)** ölçü birimiyle ifade edilir.

Saflık derecesi 22 karat olan altına **standart altın** denir, saflık derecesi 222 peniveyt (gümüş ayarı) olan gümüşe **standart gümüş** denir. Altın (gümüş) filiz, standart altından (gümüşten) daha iyi ise, onu *B (ing. Beter – daha iyi)* ile, standart ölçüden daha kötü ise, onu *W (ing. Worse – daha kötü)* işaretiyle işaretlenir.

Para birimi, bir devletin para sisteminin temel birimidir; kanunla düzenlenmiş bir ülkenin değerlerinin temel ölçüsüdür.

Ülkede üretim verimliliğinin genel seviyesinin artması durumunda, paranın resmi değerinde değişme olmadığına rağmen, ulusal paran biriminin iç piyasadaki alım gücü artar. Bu duruma **paranın değer kazanması** (apresiyasyon) denir.

Aksi takdirde, paranın resmi değerinde değişme olmadan, ulusal paranın iç piyasadaki alım gücü azaldığı duruma **paranın yıpranması** (depresyonu) denilir.

Ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında değerinin isteyerek belli bir amaca yönelik olarak bir aktı ile bir defaya mahsus olmak üzere düşürülmesine **devalüasyon** denir.

Ulusal paranın, yabancı para birimleri karşısında değerinin isteyerek belli bir amaca yönelik olarak bir aktı ile bir defaya mahsus yükselmesine **revalüasyon** denir.

Bir ulusal ekonominin yabancı devletlerdeki parası iki şekilde bulunabilir: **Efektif yabancı paralar** ve kısa vadeli yabancı para birimleri cinsinden alacaklar ya da **dövizler.**

Döviz, kısa vadeli tüm yabancı paralar ve bu para cinsinden değer taşıyan menkul değerlere verilen isimdir. Metal altın paralar bunun haricindedir.

Bu tanımdan hareket ederek, siyaset - ekonomi açısından **serbest** ve **bağlı dövizler** olmak üzere iki gruba ayrılıyorlar. Dönüştürme yapma (konverziyon) kabiliyeti açısından dövizler: **konvertibil, konvertibil olmayan** ve **klirink** olabilirler. Teslimat vadesine göre dövizler, **spot** ve **terminli** gibi iki cinsten olabilirler.

Döviz kuru, bir birim yabancı paranın ulusal para cinsinden fiyatıdır. Aslında, döviz kuru ulusal paranın yabancı paraya göre fiyatıdır, ya da diğer sözlerle, bir birim yabancı para için, ulusal paradan kaç birim para verilmelidir anlamındadır. Kurun bu şekilde ifade edilişine **doğrudan kotasyon** sistemi denir. **Dolaylı kotasyon sistemi** ise sadece İngiltere devletinde (ve onun bir zamanki kolonileri olan devletlerde) uygulanmaktadır. Burada döviz kuru, bir yerli para birimi için, yabancı para biriminden kaç birim ödenmesi gerekir biçiminde tanımlanır. **Nominal döviz kuru,** enflasyon katsayısını hesaba koymadan, **y**abancı paranın ulusal para cinsinden fiyatına denir. **Reel döviz kuru**, nominal kurların iç ve dış enflasyon oranlarına göre ayarlanmış şekline denir. **Efektif döviz kuru**, ülkenin ticari ilişkide bulunduğu ülkelerin paralarındaki değişmelerin ülkenin döviz kurlarına yansıtılması yoluyla elde edilir. Efektif paraların sahte olma imkanı olduğundan, bankalar pratikte efektif döviz kurunu özel olarak gösteriyorlar. **Efektif döviz kuru**, genellikle dövizlerin kurlarından daha alçaktır ve bankalar bu kuru ayrıdan gösteriyorlar.

Uluslararası her işlem iki satın alımla yapılır. Uluslararası alışverişte malın satın alınması ve para biriminin satın alınmasıdır. Bu şekilde şu sonuca varıyoruz: Uluslararası alışverişte sadece malların fiyatları değil, ulusal para birimlerinin de fiyatları oluşmaktadır. Bunu şu bağıntılarla gösterebiliriz:

a) İhracat için: $Ei = Qi \cdot pi \cdot T$, yani bir malın ihracat değeri, mal miktarı, yabancı döviz piyasasındaki fiyatı ve yabancı para biriminin kuru ile çarpımına eşittir.

b) İthalat için: $Ui = Qi \cdot pi \cdot T(1+ti)$, yani bir malın ithalat değeri, mal miktarı, satın alındığı pazar fiyatı ve ithalat masraflarıyla $(1 + ti)$ arttırılmış yabancı para biriminin kuru ile çarpımına eşittir.

Bazı durumlarda, dövizler ve para birimlerinin kurları, **uluslararası para kuru** ortak adıyla ifade ediliyorlar. Uluslararası para kuru, bir devletin efektif paraları diğer bir devletin efektif parasıyla değiştirme fiyatıdır.

Bir para birimini diğer para birimiyle alış veya satışının işlem tarihinde belirlenen fiyat üzerinde en çok iki iş günü sonrasında gerçekleştirildiği işleme **Spot işlem** denir.

Bu esnada işlemin yapılması için gereken evrakların hazırlanır ve efektif transferin yapılmasına imkan sağlanmış olur.

Spot döviz kuru, anında geçerlilikte olan kur ya da sözleşmeli pazar fiyatıdır.

Spot işlemler, bir para biriminin diğer para birimiyle doğrudan değiştirilmesidir. İşlem yapılınca her iki devletin ödeme sistemleriyle paraların transferi gerçekleştirilir.

Döviz pazarında her **para birimi için iki fiyat vardır** – fiyatlardan biri, belli bir para birimini satıcının satmak istediği fiyat ve ikincisi, satın alanın satın almak istedikleri fiyattır (alış ve satış kuru). Spot kurlarda, kurların kotasyonunun bilinmesi önemlidir. Daha doğrusu, doğrudan ve dolaylı kotasyon, Avrupa ve Amerika koşulları vb.

Döviz biriminin kotasyonu: Bir para biriminin fiyatı gibi, bir döviz kurunun diğerine göre kotasyonu iki şekilde görülmektedir: ulusal para biriminin, yabancı para birimine göre değeri **doğrudan** ve yabancı para biriminin yerli para birimine göre değeri **dolaylı kotasyondur**.

Her döviz işlemi iki para birimi kapsamında yapılır. Burada önemli olan para birimlerinden hangisi **temel para birimidir** ve hangisi **koşullanmış para birimidir** (ya da hesaplanan para birimidir).

USD dışında herhangi iki para biriminin kurları **çapraz kur** diye ifade edilir.

Çarpımsal ters kurlar da vardır. Temel para birimi sayılan herhangi para biriminin kotasyonu, değişken para birimi olarak kendi çarpımsal tersi biçiminde kendine denk kotasyona dönüştürülebilir.

Puan, döviz kurunun son ondalık basamağındaki birimdir.

Pazarcı her an nasıl pozisyonda olduğunu bilmesi. Bulunduğu noktada kazançlı olup olmadığını tespit etmek için o geçerlikte olan anındaki döviz kuruyla karşılaştırma yapmak için pazarcı, aynı zamanda kendi net – pozisyonunun **ortalama döviz kurunu** bilmesi gerekir. Pazarcı, gün sonunda pozisyonunu kapamak mecburiyetinde değildir, fakat böyle durumda o ana kadar pozisyonunun **gerçekleşmeyen kazancı ya da zararı** hesaplamalıdır. Bunu belirtmek için gün sonunda sanki pozisyonu kapatmış olduğunu sayarak, geçerlilikte olan kur ile kazancın ya da zararın ne kadar olduğunu hesaplamakla belirtir.

3 ÜSTEL VE LOGARİTMALI DENKLEMLER

3.1. Reel Sayılı Üslü Kuvvet Kavramı

Tabanı ***a*** doğal sayı, tam sayı ya da rasyonel sayı olan üslü ifadelerin (kuvvetlerin) anlamını artık biliyorsunuz. Bunları bir daha hatırlayalım.

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

a) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}} : x^{-0,5}$ b) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$ c) $9^{-\frac{1}{2}} + 0,25^{-\frac{3}{2}}$

Rasyonel üslü kuvvetlerin tanımı ve özellikleri gereğince:

a) $x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}} : x^{-0,5} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-(-0,5)} = x^{\frac{23}{12}}$

b) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = x - y$

c) $4^{\frac{1}{2}} + 0,25^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{4} + \dfrac{1}{\sqrt{0,25^3}} = 2 + \dfrac{1}{0,125} = 2 + 8 = 10$

elde edilir.Şimdi, rasyonel sayılı üslü kuvvetler kavramını genişleterek reel üslü kuvvetler kavramını ve bazı temel özelliklerini açıklamaya çalışacağız.

Her reel sayı x ve her pozitif sayı a için aşağıda sayılan özelliklerle bir a^x kuvveti bellidir:

I. $x > 0$ için,

1. $x = n$ ise $a^x = \begin{cases} a & n=1 \text{ için} \\ \underbrace{aa...a}_{n} & n>1 \text{ için} \end{cases}$

2. $x = \dfrac{1}{n}$, ise $a^x = \sqrt[n]{a}$

3. $x = \dfrac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, ise $a^x = \sqrt[n]{a^k}$

4. $x = c_0, c_1c_2...c_{n...,}$ ise

a) $a > \mathbf{1}$, için $a^{c_0,c_1c_2...c_n} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)}$

b) $0 < a < 1$, için $a^{c_0,c_1c_2...(c_n+1)} < a^{c_0,c_1c_2...c_n...} < a^{c_0,c_1c_2...c_n}$

c) $a = 1$, için $a^x = \mathbf{1}$ dir

II. $x = 0$ ise $a^x = \mathbf{1}$ dir

III. $x<0$ ise $a^x = \dfrac{1}{a^{|x|}}$

2. a) Reel sayılı üslü kuvvetlerin yukarıdaki tanımı gereğince x > 0 için 5^{-x} ifadesinin anlamı vardır, çünkü $a = 5 > 0$ dır. Halbuki $(-5)^{-x}$ ifadesinin x > 0 için anlamı yoktur, çünkü $a = -5 < 0$'dır.

b) Her $x \in R$ için 0^{-x} ve 0^{x} ifadelerinin anlamı yoktur, çünkü $a = 0$'dır. ♦

a pozitif reel sayısının reel üslü kuvvetleri için şu özellikler geçerlidir:

1. $a^x = b^x$, eşitliği her $x \in$ R için geçerli olması için ancak ve ancak a = b olmalıdır.

2. Her $x \in$ R için bir tek ax kuvveti vardır;

3. Her $x, y \in$ R için, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ geçerlidir.

4. Her $x, y \in$ R için, $(a^x)^y = a^{xy}$ geçerlidir.

5. Her $x \in R$ için, $(ab)^x = a^x b^x$ geçerlidir.

3. Reel sayılı üslü kuvvetlerin tanımı ve yukarıdaki özellikler gereğince

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x (b^{-1})^x = a^x b^{-x} = \frac{a^x}{b^x}.$$

elde edilir ♦

4. Verilen işlemleri yapınız:

a) $3^x 4^x$; b) $4^z : 2^z$; c) $(8^x 9^y 15^z):(2^x 3^y 5^z)$.

Çözüm:

a) $3^x 4^x = (3 \cdot 4)^x = 12^x$; b) $4^z : 2^z = \left(\frac{4}{2}\right)^z = 2^z$;

c) $(8^x 9^y 15^z) : (2^x 3^y 5^z) = \left(\frac{8}{2}\right)^x \left(\frac{9}{3}\right)^y \left(\frac{15}{5}\right)^z = 4^x 3^y 5^z$. ♦

Alıştırmalar

1. Reel sayılı üslü kuvvet nasıl tanımlanır?

2. Kuvvetlerle verilmiş olan işlemleri yapınız:

a) $2^x 2^y$; b) $2^x : 4^x$; c) $12^x 11^x$; d) $(2^x 5^x)^y$

3. Verilen kuvvetleri karşılaştırınız:

a) 3^x ve $9^{x/2}$; b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ ve $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$

4*. Verilen eşitsizliklerde hangi sayı büyüktür *x* yoksa *y*?

a) $0{,}4^x > 0{,}4^y$; b) $1{,}4^x > 1{,}4^y$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$.

5. Verilen işlemleri yapınız:

a) $(2^x + 3^x)(2^x - 3^x)$; b) $(5^x - 5^{-x})^2$; c) $(4^x + 1)^3$.

3.2. Üstel Denklemler

Tanım 1. Tabanı 1'den farklı pozitif bir reel sayı olan ve üssünde değişken bulunan denklemlere **üstel denklem** denir.

1. Örnek olarak, aşağıdakiler üstel denklemlerdir:

$2^x = 8$, $4^{x-3} = x - 2$, $2{,}3^{x+3} = 5 \cdot 3^x + 49$ ve $x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$. ♦

Birkaç çeşit üstel denklem çözelim.

I. $A^x + m = 0$, $A > 0$, $A \neq 1$, $m < 0$ **biçiminden denklem.**

2. $3^x = 27$ denklemini çözünüz.

Verilen $3^x = 27$ denklemini $3^x = 3^3$ biçiminde yazarak verilene denk denklem elde edilir. Bu durumda pozitif reel sayı *a* tabanlı reel sayılı üslü kuvvetlerde

$a > 0$, $a \neq 1$, $a^{x_1} = a^{x_2}$ ancak ve ancak $x_1 = x_2$'dir, özelliğinden yararlanarak

$3^x = 3^3$ eşitliğinden $x = 3$ elde edilir. Buna göre $3^x = 27$ denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $x = 3$'tür. ♦

3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $4^x = \frac{1}{16}$

$4^x = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$4^x = 4^{-2}$

$x = -2$

b) $5^x = 1$

$5^x = 5^0$

$x = 0$

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125}$.

$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$

$x = -3$. ♦

II. $A^{f(x)}+m=0$, $A>0$, $A\neq1$, $m<0$ biçiminden denklemler.

4. Verilen denklemleri çözünüz.

a) $3^{x+5}=81$	b) $2^{3x-1}=32$	c) $3^{x^2}=81$.
$3^{x+5}=3^4$	$2^{3x-1}=2^5$	$3^{x^2}=3^4$
$x+5=4$	$3x-1=5$	$x^2=4$
$x=-1$	$x=2$	$x=\pm2$. ♦

III. $a(A^{f(x)})^2+bA^{f(x)}+c=0$ biçiminden denklemler

$A^{f(x)}=t$ değişimiyle $at^2+bt+c=0$ biçiminde ikinci derece denklem elde edilir. İkinci derece denklemin her çözümü için $A^{f(x)}=t$ üstel denklemini çözüyoruz.

5. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $2^{2x}-6\cdot2^x+8=0$	b) $16^x-3\cdot4x+2=0$	c) $12\sqrt[2x]{81}-\sqrt[x]{81}=27$.
$(2^x)^2-6\cdot2^x+8=0$	$(4^x)^2-3\cdot4x+2=0$	$12\sqrt[2x]{81}-\left(\sqrt[2x]{81}\right)^2=27$
$2^x=t$	$4^x=t$	$\sqrt[2x]{81}=t$
$t^2-6t+8=0$	$t^2-3t+2=0$	$12t-t^2=27$
$t_1=8,\ t_2=2$	$t_1=2,\ t_2=1$	$t^2-12t+27=0$
$2^{x_1}=8,\ 2^{x_2}=2$	$4^{x_1}=2,\ 4^{x_2}=1$	$t_1=9,\ t_2=3$
$2^{x_1}=2^3,\ 2^{x_2}=2^1$	$2^{2x_1}=2^1,\ 2^{2x_2}=2^0$	$9^{\frac{1}{x_1}}=9^1,\ 3^{\frac{2}{x_2}}=3^1$
$x_1=3,\ x_2=1$	$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=0$	$x_1=1,\ x_2=2$ ♦

Alıştırmalar

1. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $9^x=\frac{1}{729}$; b) $5^x=\left(\frac{4}{5}\cdot1{,}25\right)^{10}$; c) $\left(\sqrt{10}\right)^x\cdot0{,}1=1000$;

ç) $\left(\frac{4}{5}\right)^x-\frac{125}{64}=0$; d) $10^{\frac{4}{x}}=10^{x-3}$; e) $4^x=\frac{81}{1296}$.

2. Denklemleri çözünüz:

a) $16^{x-0{,}5}=32^{14-x}$; b) $2\cdot5^x=50$; c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0$; ç) $\frac{0{,}125}{4^{3-2x}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

3. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$; b) $49^x + 4\cdot 7^x - 5 = 0$; c) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

4*. Denklemleri çözünüz:

a) $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$; b) $15\cdot 2^{x+1} + 15\cdot 2^{-x+2} = 135$; c) $\dfrac{4^x + 1}{4^{x+1} - 2} = 2^{2x+1} - 1$.

5*. Denklemleri çözünüz:

a) $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}} = 12$; b) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$; c) $\dfrac{9}{2^{x-2}} = \dfrac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$.

3.3. Logaritma Kavramı

Tanım 1. $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1\ ve\ b \in R^+$ olsun. $a^x = b$ eşitliğini sağlayan x reel sayısına a tabanlı b'nin logaritması denir. Bunu $x = \log_a b$ şeklinde yazarız.

Buna göre, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ için

$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$ dir.

Tanımdan doğrudan doğruya

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ gerekir.

x sayısına **logaritma değeri,** a sayısına **logaritması tabanı,** ***b*** sayısına **logaritması alınan sayı** denir.

1. Tablodaki değerlerin doğru olup olmadıklarını yoklayınız.

Kavramlar	log2 8 = 3	log5(m + 3) = 2	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$
Logaritma	3	2	4
Logaritması tabanı	2	5	$\frac{1}{3}$
Logaritması alınan sayı	8	m + 3	$\frac{1}{81}$

2. a) $\log_3 9 = 2$, çünkü $3^2 = 9$; b) $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$, çünkü $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

c) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, çünkü $\sqrt{5}^4 = 25$; ♦

3. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$; b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$; c) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}$.

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; elde edilir.

Yoklamasını yapalım: $2^{\log_2 \frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ olduğuna göre, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$ gerekir.

Yoklama: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$. ♦

c) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3} = -\frac{1}{14}$ çünkü $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{14}} = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3}$ dir.

Yoklama: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[7]{3}} = \sqrt[7]{3}$ ♦

4. Hangi sayının $\frac{1}{2}$ tabanına göre logaritması 4'tür?

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ olduğundan $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$ gerekir. Demek ki aranılan sayı $\frac{1}{16}$ dır. ♦

5. $\log_a \frac{1}{8} = 3$ olduğuna göre a tabanını belirtiniz.

Logaritma işleminin tanımına göre $a^3 = \frac{1}{8}$, yani $a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ gerekir. O halde $a = \frac{1}{2}$ olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen tabloyu defterinizde çiziniz ve doldurunuz.

İfadeler	log6 216 = 3	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a(b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Log. değeri					
Log. tabanı					
Log. alınan sayı					

2. Verilen logaritmaların değerini belirtiniz:

a) $\log_3 \frac{1}{9}$;   b) $\log_{0,1} 0{,}01$;   c) $\log_3 \sqrt{3}$;   d) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$.

3. Logaritma işleminin tanımından yararlanarak aşağıdakilerden *x* belirtilsin:

a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$;   b) log *x* 36 = 2;   c) logi *x* = 0;   d) $\log_x 125 = 5$.

4. Verilen ifadenin değerini belirtiniz:

a) $5^{\log_5 2}$ b) $5^{2\log_5 3}$.

5. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $\log_2 8 - \log_3 9$;   b) $4\log_{\sqrt{3}} 27 + 3\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.

6*. x in hangi değerleri için $\log_{0,2}(x^2 - x)$ ifadesinin anlamı vardır?

3.4. Logaritmanın Kuralları

$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ ve $y > 0$ olsun.

I. Çarpıma ait logaritmanın kuralları

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

İspat. $\alpha = \log_a x$ ve $\beta = \log_a y$ olsun. O halde $a^\alpha = x$ ve $a^\beta = y$ elde edilir. $x > 0$, $y > 0$ olduğuna göre $xy > 0$ gerekir. O halde $\log_a xy$ ifadesinin de anlamı vardır. Buna göre, $a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$ yazabiliriz. Oradan da $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ elde edilir.

I. $\log_2 6 = \log_2 2 \cdot 3 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$. ◆

Aynı kural ikiden fazla çarpanları olan çarpım için de geçerlidir, yani $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$, olduğu durumda

$$\boxed{\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$ geçerlidir

. **II. Kuvvetin Logaritma Kuralı**

$$\boxed{\log_a x^s = s\log_a x}$$

İspat. $\alpha = \log_a x$ olsun. $x > 0$ olduğundan $x^s > 0$ gerekir. O halde $\log_a x^s$ vardır. $a^{\log_a x^s} = x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s\log_a x}$ olduğundan $\log_a x^s = s\log_a x$ elde edilir.

2. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4.$ ♦

III. Bölümün Logaritm Kuralı

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

İspat. $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, olduğunu bildiğimize göre, bir çarpımın logaritması kuralı gereğince $\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$ elde edilir. ■

3. $\log_7 0{,}7 = \log_7 \frac{7}{10} = \log_7 7 - \log_7 10 = 1 - \log_7 10.$ ♦

Bir kuvvetin logaritması kuralı sonucu olarak şu formül elde edilir:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\log_a x.}$$

4. $\log_2 \sqrt[7]{32} = \log_2 \sqrt[7]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}\log_2 2 = \frac{5}{7}.$ ♦

Aynı tabana göre tertiplenmiş logaritmaların kümesine **logaritma sistemi** denir. 10 tabanına göre tertiplenmiş logaritmalara **ondalık logaritmalar** denir. Ondalık logaritmaları $\log x$ biçiminde yazıyoruz, yani burada taban 10 yazılmıyor. Ondalık logaritmalar için çok kez *lg x* işaretlemesi de kullanılır. Buna göre $\log_{10} x = \log x = \lg x$. e tabanına göre $e \approx 2{,}71$ tertiplenmiş logaritma sistemine **doğal logaritmalar** denir. Doğal logaritmalar *ln x* biçiminde işaret edilir, yani $log_e\, x = ln\, x$ dir. Logaritma işleminin kuralları ondalık ve doğal logaritmalar için de geçerlidir.

5. a) $\lg 10 = 1 \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2 \quad \lg 10000 = \lg 10^4 = 4\lg 10 = 4$

b) $\ln e = 1 \quad \ln e^2 = 2\ln e = 2 \quad \ln e^4 = 4\ln e = 4$

c) $\lg 0{,}1 = \lg \frac{1}{10} = \lg 10^{-1} = -1 \quad \lg 0{,}001 = \lg \frac{1}{1000} = \lg 10^{-3} = -3$

d) $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1 \quad \ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3.$ ♦

Bu son örnekte görüldüğü gibi, 1'den büyük ondalık birimin logaritması pozitif tam sayıdır ve sayının sıfırları kadar birimleri vardır; 1'den küçük ondalık birimlerin logaritması ise negatif tam sayıdır ve ondalık kısmında sıfırların sayısı kadar birlikleri vardır.

Logaritması rasyonel sayı olan x pozitif reel sayısı verilmiş olsun, yani $\log x = k$, $k \in Q$. O halde $x = 10^k$ dir. Buna göre, 10^k, $k \in$ Q biçiminde olmayan pozitif sayının ondalık logaritmi irrasyonel sayıdır. Onun ondalık sayı biçiminde yazılışında sonsuz çok ondalık basamakları vardır, bu nedenle bu sayıyı 5. ondalık basamağında anlaşma gereği yuvarlayacağız.

A herhangi bir pozitif reel sayı olsun. O halde $10^{n-1} \le A \le 10^n$ dir. Buna göre $\lg 10^{n-1} \le \lg A \le \lg 10^n$ gerekir. Ondalık logaritması tanımına göre $n-1 \le \lg A \le n$ elde edilir. Son eşitsizlikten $0 \le \lg A - (n-1) < n$ elde edilir. O halde

$n \in N$ ve $0 \le \alpha < 1$ için $\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}$, geçerlidir.

n sayısına A sayısının logaritmasının **karakteristiği,** α sayısına ise **mantis** denir. Diğer sözlerle logaritmayı ifade eden ondalık sayının tam kısmına karakteristik, ondalık kısmına ise mantis denir. Buna göre karakteristik pozitif, negatif tam sayı ya da sıfır olabilir, mantis ise 0 ve 1 arasında bir sayıdır.

6. lg 495,27 sayısının karakteristiğini yazınız.

$100 \le 495,27 < 1000$ olduğuna göre $\lg 100 \le \lg 495,27 < \lg 1000$ elde edilir. O halde $2 \le \lg 495,27 < 3$ bulunur. Buna göre $\lg 495,27 = 2 + \alpha$; $0 \le \alpha < 1$. lg 495,27 logaritmasının karakteristiği 2 dir. ♦

7. log 0,037 logaritmasının karakteristiğini belirtiniz.

0,01 < 0,037 < 0,1 olduğundan lg0,01 < lg 0,037 < lg 0,1 ya da -2 < log A < -1 dir. Buna göre, $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere log 0,037 = - 2 + α biçiminde yazılır. log 0,037 ifadesinin karakteristiği – 2'dir. ♦

6. ve 7. ödevlerinden şu sonuca varılır: 1'den büyük sayıların logaritmalarının karakteristiği, verilen sayının tam kısmının rakamları sayısından 1 küçüktür; 1'den küçük sayıların karakteristiği ise negatif sayıdır ve ondalık yazılışında virgülden sonra gelen sıfırların sayısı kadar birimleri vardır.

8. Hesap makinesi kullanarak reel sayıların logaritmalarını belirtebiliriz, örnek:

$\lg 24,257 = 1,38484$
$\lg 1278,13 = 3,10658$
$\lg 0,00257 = -2,59007$. ♦

9. $\lg a = m$, $\lg b = n$, $\lg c = p$ olduğuna göre, $\frac{a^2 b}{c^4}$, ifadesinin ondalık logaritmasını belirtiniz.

$$\lg \frac{a^2 b}{c^4} = \lg a^2 b - \lg c^4 = \lg a^2 + \lg b - \lg c^4 = 2\lg a + \lg b - 4\lg c = 2m + n - 4p. \ ♦$$

Alıştırmalar

1. Verilen ifadelerin logaritmalarını alınız:

a) $x = 3ab$; b) $x = a^2bc^5$, c) $x = \dfrac{ab}{2c}$;

d) $x = 2(a-b)$; e) $x = \dfrac{\sqrt{a}}{b^2 - c^2}$; f) $x = \sqrt{a\sqrt[3]{b^2}}$.

2. İfadeleri sadeleştiriniz:

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \log_3 4)$; b) $\log_3 64 \log_2 \dfrac{1}{27}$; c) $\log_2 \log 100$.

3. Verilenlerden x sayısı belirtilsin:

a) $\lg x = \lg 5 - \lg 2 + \log 4$; b) $\lg x = 3\lg 2 - 2\lg 3$;

c) $\lg x = \dfrac{1}{2}\lg 3 + \dfrac{2}{3}\lg 5 - \dfrac{1}{3}\lg 2$; d) $\lg x = \dfrac{1}{4}(2\lg 2 - 4\lg 3 + 5\lg 4)$;

e) $\ln x = \ln 5 - \ln 3 + \ln 1$; f) $\ln x = 3\ln 2 - 3\ln 3$;

g) $\ln x = \dfrac{1}{3}\ln 3 + \dfrac{1}{3}\ln 4 - \dfrac{1}{3}\ln 2$; h) $\ln x = \dfrac{1}{4}(2\ln 2 + 4\ln 3 + 5\ln 4)$.

4. $\lg 2 \approx 0{,}30$ ve $\lg 3 \approx 0{,}48$ olduğunu alırsak, aşağıdakilerin yaklaşık değerini belirtiniz:

a) $\lg 4,\ \lg 6,\ \lg 8,\ \lg 9$; b) $\lg 12,\ \lg 16,\ \lg 18$.

5. Verilen logaritmaların karakteristiğini yazınız:

a) $\lg(0{,}7545 \cdot 0{,}0256 \cdot 0{,}65^2)$; b) $\lg \dfrac{28{,}5 \cdot 3{,}507}{0{,}457 \cdot 0{,}0293}$;

c)* $\lg \sqrt[5]{\dfrac{129}{9775}}$; d)* $\lg(0{,}85 \cdot \sqrt[3]{0{,}55})$.

3.5. Faklı Tabanlı Logaritmalar Arasındaki Bağıntılar

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$ olsun.

Taban değiştirme formülü

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}.$$

İspat. $x = a^{\log_a x}$ eşitliğin her iki tarafının b tabanına göre logaritması alınırsa $\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \bullet \log_b a$ elde edilir. oradan da $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ elde edilir. ■

1. $\log_3 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 7 \cdot \dfrac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \dfrac{\log_3 9}{\log_3 6} =$

$= \log_3 9 = 2.$ ♦

Sonuç 1. $x = b \neq 1$ ise, $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$.

İspat. $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}.$ ■

2. $\log_{32} 2 = \dfrac{1}{\log_2 32} = \dfrac{1}{5}.$ ♦

Sonuç 2. $a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0,\ b > 0$ ise $\boxed{\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s}\log_a b}$.

İspat. $\log_{a^s} b = \dfrac{1}{\log_b a^s} = \dfrac{1}{s \log_b a} = \dfrac{1}{s}\log_a b$. ■

3. $\log_{2^3} 4 = \dfrac{1}{3}\log_2 4 = \dfrac{1}{3} \cdot 2 = \dfrac{2}{3}.$ ♦

Sonuç 3. $a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0,\ b > 0$ ise $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}$.

İspat. $\log_{a^s} b^s = s \log_{a^s} b = s \cdot \dfrac{1}{s}\log_a b = \log_a b.$ ■

4. a) $\log_4 2^2 = \log_{2^2} 2^2 = \log_2 2 = 1$; b) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{9} = \log_{3^{\frac{1}{3}}} 9^{\frac{1}{3}} = \log_3 9 = 2.$ ♦

6. $\lg 2 \approx 0{,}30$ ve $\lg 3 \approx 0{,}48$ olduğunu alırsak

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg \frac{10}{2}} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} \approx \frac{0{,}30 + 0{,}48}{1 - 0{,}30} = \frac{0{,}78}{0{,}70} = \frac{39}{35}.$$ ♦

elde edilir.

Alıştırmalar

1. Farklı tabanlı logaritmalar arasındaki bağıntıyı ifade ediniz.

2. Eşitlikleri ispatlayınız:

a) $\log_3 12 = \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$;

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \dfrac{1}{3}.$

3. $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

4. İfadeleri sadeleştiriniz:

a) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$; b) $\log_3 64 \cdot \log_2 \dfrac{1}{27}$; c) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$.

5*. $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$ olduğunda $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$ olduğunu ispatlayınız.

3.6. Logaritmalı Denklemler

Tanım 1. İçinde bilinmeyenin ya da fonksiyonun logaritması bulunan denklemlere **logaritmalı denklem** denir.

1. Aşağıda verilen denklemler logaritmalı denklemlerdir:

$\log_2(x + 4) = 7$, $\log_{2x}(5 + x^2) = 9$, $\log_5(3x - 2) = \log_5 x$. ◆

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olsun.

I. *Log* $_a$*f*(*x*) = *b* cinsinden logaritmalı denklemlerin çözümü

Logaritma işleminin tanımından şu eşitliklerin denkliği gerekir:

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^b = f(x)$.

2. Verilen denklemleri çözelim:

a) $\log_3(x+5) = 3$

$x+5 = 3^3$

$x+5 = 27$

$x = 22$

b) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 7x + 13) = 0$

$x^2 - 7x + 13 = (\sqrt{3})^0$

$x^2 - x + 12 = 0$

$x_1 = -3$ и $x_2 = 4$

c) $\log_5(x^2 - 9)^2 = 2$

$(x^2 - 9)^2 = 5^2$

$x^4 - 18x^2 + 56 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{14}$

c) şıkkındaki denklemi çözmek için, bir kuvvetin logaritması özelliğinden yararlanacağız:

$\log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \log_5(x^2 - 9) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x^2 - 9) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 5 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{14}$. ◆

Denklemin dört kökü olduğuna rağmen, burada sadece iki kökünü bulmuş oluyoruz. Bunun sebebi, bir kuvvetin logaritmasını yanlış kullandığımızdan ötürüdür; daha doğrusu $\log_a b^2 = 2 \log_a b$ eşitliği sadece $b > 0$ olduğu durumda geçerlidir. Bir kuvvetin logaritması özelliğini doğru kullanmak istersek şu şekilde yazmalıyız:

$$\log_5(x^2 - 9)^2 = 2 \Leftrightarrow 2\log_5|x^2 - 9| = 2 \Leftrightarrow \log_5|x^2 - 9| = 1 \Leftrightarrow |x^2 - 9| = 5.$$

II. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ cinsinden logaritmalı denklemlerin çözümü

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denkleminin çözümü, $f(x) = g(x)$ denkleminin çözümünden elde edilir. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denkleminin her çözümü, $f(x) = g(x)$ denkleminin de çözümüdür. Bunun tersi genel durumda geçerli olmayabilir. Bu nedenle $f(x) = g(x)$ denkleminin çözümlerini bulduktan sonra, elde edilen çözümleri $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ denklemini de sağlayıp sağlamadığını yoklamamız gerekir.

3. Denklemleri çözünüz:

a) $\log_3(x^2-7x+11) = \log_3(x-4)$

$x^2-7x+11 = x-4$

$x^2-8x+15=0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 5$

Yoklama: $x=3$

$\log_3(3^2-7\cdot 3+11) = \log_3(3-4)$

$\log_3(-1) = \log_3(-1)$, yoktur

$x=3$ çözüm değildir

Yoklama: $x=5$

$\log_3(5^2-7\cdot 5+11) = \log_3(5-4)$

$\log_3 1 = \log_3 1$

Verilen denklemin çözümü x = 5 dir.

b) $\lg(3x-2-2x^2) = \lg(x^2-10x-12)$

$3x-2-2x^2 = x^2-10x-12$

$3x^2-13x-10=0$

$x_1 = 5,\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$

Yoklama: $x=5$

$\lg(3\cdot 5-2-2\cdot 5^2) = \lg(5^2-10\cdot 5-12)$

$\lg(-37) = \lg(-37)$, yoktur

$x=5$ çözüm değildir

Yoklama: $x = -\dfrac{2}{3}$

$$\lg\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right\} = \lg\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^2-10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-12\right\}$$

$\lg\left(-\dfrac{44}{9}\right) = \lg\left(-\dfrac{44}{9}\right)$, nuk ekziston

Verilen denklemin reel çözümleri yoktur. ◆

III. $\log_a f(x) = b$ ve $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde denklemlere dönüşebilen denklemlerin çözümü

4. Verilen denklemleri çözünüz:

a) $\log_3(x-3)+\log_3(2x+1) = 2$

b) $\log_5(x^2-6x+7) = \log_5(x-3)$

c) $4-\lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$.

a) $\log_3(x-3)+\log_3(2x+1) = 2$

$\log_3(x-3)\cdot(2x+1) = 2$

$2x^2-5x-12=0$

Yoklama: $x = 4$, ve ondan sonra $x = -\dfrac{3}{2}$, değerlerini değiştirmekle, denklemin çözümü sadece $x = 4$ olduğunu buluyoruz.

$x_1 = 4, x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $\log_5(x^2 - 6x + 7) = \log_5(x - 3)$

$\log_5(x^2 - 6x + 7) - \log_5(x - 3) = 0$

$\log_5 \frac{x^2 - 6x + 7}{x - 3} = 0$

$\frac{x^2 - 6x + 7}{x - 3} = 1, x \neq 3$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$> 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$$

Yoklama: x = 5 ve ondan sonra x = 2 değerlerini değiştirmekle, denklemin çözümü sadece x = 5 olduğunu buluyoruz.

c) $4 - \lg 2x = 3\sqrt{\lg 2x}$

$\sqrt{\lg 2x} = t$, olsun

$4 - t^2 = 3t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$t_1 = 1, t_2 = -4$

$\sqrt{\lg 2x} = 1$

$x = 5.$

Yoklama: $\sqrt{\log 2x} = -4$ denkleminin çözümü olmadığına göre, x = 5 çözümünü denklemde değiştirmekle, denklemin bir tek çözümü olduğunu görüyoruz.

5. Denklemleri çözünüz:

a) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

$\log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7,$

$\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 7,$

$\frac{7}{4}\log_2 x = 7,$

$\log_2 x = 4,$

$x = 2$

Yoklama $\log_{16} 2 + \log_4 2 + \log_2 2 = 7$

Denklemin çözümü $x = 2.$

b) $\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1.$

$\log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1$

$\frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2\log_3 x} = 1$

$\log_3^2 x - 2\log_3 x + 1 = 0$

$\log_3 x = t$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t = 1$

$\log_3 x = 1$

$x = 3.$

Yoklama $\log_9 3 + \log_9 3 = 1$

$2\log_9 3 = 1,\ \log_9 9 = 1$

Denklemin çözümü $x = 3.$

c) $\lg 5 + \lg(x + 10) - 1 = \lg(21x - 20) - \lg(2x - 1).$

$\lg 5 + \lg(x + 10) - \lg 10 = \lg(21x - 20) - \lg(2x - 1)$

$$\lg\frac{5(x+10)}{10}=\lg\frac{21x-20}{2x-1}$$
$$\frac{5(x+10)}{10}=\frac{21x-20}{2x-1}$$
$$5(x+10)(2x-1)=10(21x-20)$$
$$10x^2+95x-50=210x-200$$
$$x_1=10,\quad x_2=\frac{3}{2}.\ \blacklozenge$$

Yoklama

$$\lg 5+\lg 20-1=\lg 190-\lg 19$$
$$\lg 100-\lg 10=\lg 10$$
$$\lg 10^2=2\lg 10$$
$$2\lg 10=2\log 10$$

Denklemin cözümü $x = 10$ dur.

çözümü yoklayınız? $x_2=\frac{3}{2}$ e

Alıştırmalar

1. $\log_{\sqrt{3}}(2x^2-6)=2.$

2. $\log_3(x^2-5x+7)=1.$

3. $\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$

4. $\lg(3x-1)+\lg(12-x)=2.$

5. $\log_x 2-\log_x 3=4.$

6. $\log_2 x-\log_{16} x=3.$

7*. $\log_3(1+\log_3(2x-7))=1.$

3.7. Konuyu Pekiştirme Ödevleri

1. Hangi x ve y reel sayıları için eşitlik geçerlidir:

a) $8^x=8^y$;   b) $\sqrt{3}^x>\sqrt{3}^y$;   c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y$?

2. a) $a>1$ b) $0<a<1$

ise, hangisi büyüktür: $a^{\frac{2}{3}}$ yoksa $a^{\frac{3}{2}}$?

Denklemleri çözünüz:

5. $16^{x-0,5}=32^{14-x}.$ **6.** $2\cdot 5^x=50.$ **7.** $4^x-6\cdot 2^x=-8.$

8. $\left(9^{x-1}\right)^{x-1}=9^{x-4}\cdot 3^{2x+4}.$ **9.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}x}-\frac{125}{64}=0.$ **10*.** $4^{\sqrt{x}}-2^{\sqrt{x}}=12.$

11. Logaritma işleminin tanımından yararlanarak x sayısını belirtiniz:

a) $\log_x 16 = 2$; b) $\log_x 27 = -\frac{3}{4}$; c) $\log_x 1000 = -3$;

d) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; e) $\log_{100} x = 0{,}2$; f) $\log_{\frac{1}{3}} x = 8$.

12. Şu ifadelerin logaritmasını alınız:

a) $2xy$; b) $3x^2y^2$; c) $x^2y^5\sqrt{z}$; d) $a^{\sqrt{b}}c^3$;

e) $6x\sqrt[3]{y^2}$; f) $\sqrt{2x\sqrt{x^3\sqrt{y}}}$; g)* $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{y}}}$.

13. Logaritması bilinen x sayısını belirtiniz:

a) $\log_2 x = \log_2 4 + \log_2 3 - \log_2 2$; b) $\lg x = \lg 5 + \frac{1}{2}(\lg 8 - \lg 2)$;

c) $\log x = \log 7 + \log 9 - \log 3$; d) $\log x = 2\log 3 + 3\log 5$.

14. Logaritma işlemini uygulayarak verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $x = \frac{333{,}648 \cdot 2{,}49}{125{,}36}$; b) $x = \frac{43{,}5 \cdot 0{,}26^2}{6{,}38^3 \cdot 1{,}28}$; c) $x = 3{,}25^3 \cdot \sqrt[5]{54{,}21}$.

15. a) $\log_2 5$ ile 4; b) $\log_3 7$ ile $\sqrt{7}$; c) lg5 ile 10^{-1}

16*. Farklı tabanlı logaritmalar arasındaki bağıntıdan yararlanarak verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $\dfrac{\log_{3^2} 25 + \log_3 7}{\log_3 \frac{5^2 \cdot 7^2}{3^2} + 2}$; b) $\log_2 \sqrt{x}(x+1) - \log_2 (x+1)^2 + \log_4 (x+1)$.

17. Verilen ifadelerin değerini hesaplayınız:

a) $\log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_{\frac{1}{27}} 0{,}125$;

b) $\log_3 2 + \log_7 245 + \log_{12} 7 + \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{7}} 5 + \log_{\frac{1}{12}} 84$.

Denklemleri Çözünüz:

18. $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

19. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$.

20. $7\log_{25} x - \log_5 x = 5$.

21. $\log_{x-1} 3 = 2$.

22. $\log_5 (x-3) = \log_5 (x^2 - 5x - 10)$.

23*. $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.

KONU ÖZETLERİ

Her reel sayı x ve her reel sayı a için, reel üslü a^x kuvveti şu şekilde bellidir.

I. $x > 0$ için,

1. $x = n$ ise $a^x = \begin{cases} a & n = 1 \text{ için} \\ \underbrace{aa.....a}_{n} & n > 1 \text{ için} \end{cases}$

2. $x = \dfrac{1}{n}$, ise $a^x = \sqrt[n]{a}$

3. $x = \dfrac{k}{n}$, ise $a^x = \sqrt[n]{a^k}$

4. $x = c_0, c_1c_2\ldots c_n\ldots$ ise

a) $a > 1$ için $a^{c_0,c_1c_2\ldots c_n} < a^{c_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots} < a^{c_0,c_1c_2\ldots(c_n+1)}$

b) $0 < a < 1$ için $a^{c_0,c_1c_2\ldots(c_n+1)} < a^{c_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots} < a^{c_0,c_1c_2\ldots c_n}$

c) $a = 1$ için $a^x = 1$'dir

II. $x = 0$ ise $a^x = 1$'dir

III. $x < 0$ ise $a^x = \dfrac{1}{a^{|x|}}$

a pozitif reel sayısının reel üslü kuvvetleri için şu özellikler geçerlidir:

1. $a^x = b^x$ eşitliği her $x \in \mathbb{R}$ için geçerli olması için ancak ve ancak $a = b$ olmalıdır.

2. Her $x \in \mathbb{R}$ için bir tek a^x kuvveti vardır;

3. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ geçerlidir.

4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ geçerlidir.

5. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $(ab)^x = a^x b^x$ geçerlidir.

Tabanı 1'den farklı pozitif bir reel sayı olan ve üssünde değişken bulunan denklemlere **üstel denklem** denir.

Burada şu cins üstel denklemler incelenmiştir:

I. $A^x+m=0$, $A>0$, $A\neq1$, $m<0$ biçiminden denklemler

II. $A^{f(x)}+m=0$, $A>0$, $A\neq1$, $m<0$ biçiminden denklemler

III. $a(A^{f(x)})^2+bA^{f(x)}+c=0$ biçiminden denklemler

$a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ ve $b \in \mathbb{R}^+$. olsun. $a^x = b$ eşitliğini sağlayan x reel sayısına a tabanlı b'nin **logaritması** denir. Bunu $x = \log_a b$ şeklinde yazarız.

Buna göre, $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$ için

$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b}$ dir.

Tanımdan doğrudan doğruya

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ gerekir.

x sayısına **logaritma değeri,** a sayısına **logaritmanın tabanı,** ***b*** sayısına **logaritması alınan sayı** denir.

$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$ ve $y > 0$ olsun.

I. Çarpıma ait logaritmanın özelliği

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Aynı kural ikiden fazla çarpanları olan çarpım için de geçerlidir, yani $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, olduğu durumda

$$\boxed{\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \ldots + \log_a x_n}$$

geçerlidir.

II. Kuvvetin Logaritması Kuralı

$$\boxed{\log_a x^s = s \log_a x}$$

III. Bölümün Logaritması

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Bir kuvvetin logaritması kuralı sonucu olarak şu formül elde edilir:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x^m} = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x.}$$

Aynı tabana göre tertiplenmiş logaritmaların kümesine **logaritma sistemi** denir. 10 tabanına göre tertiplenmiş logaritmalara **ondalık logaritmalar** denir. Ondalık logaritmaları log *x* biçiminde yazıyoruz, yani burada taban 10 yazılmıyor. Ondalık logaritmalar için çok kez *lg x* işaretlemesi de kullanılır. Buna göre $\log_{10} x = \log x = \ln x$. e tabanına göre $e \approx 2{,}71$ tertiplenmiş logaritma sistemine **doğal logaritmalar** denir. Doğal logaritmalar *ln x* biçiminde işaret edilir, yani $\log_e x = \ln x$'dir. Logaritma işleminin kuralları ondalık ve doğal logaritmalar için de geçerlidir.

A herhangi bir pozitif reel sayı olsun.
$n \in \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha < 1$ için $\boxed{\lg A = (n-1) + \alpha}$ geçerlidir.
n sayısına A sayısının logaritmasının **karakteristiği,** α sayısına ise **mantis** denir.

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$ olsun.
Taban değiştirme formülü

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

$x = b \neq 1$ ise, $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$.

$a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0,\ b > 0$ ise $\boxed{\log_{a^s} b = \frac{1}{s}\log_a b}$.

$a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0,\ b > 0$ ise $\boxed{\log_{a^s} b^s = \log_a b}$.

İçinde bilinmeyenin ya da fonksiyonun logaritması bulunan denklemlere **logaritmalı denklem** denir.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olsun. Şu cins logaritmalı denklemler incelenmiştir:

I. $\log_a f(x) = b$ cinsinden logaritmalı denklemler

II. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ cinsinden logaritmalı denklemler

III. $\log_a f(x) = b$ ve $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde denklemler

4 DAR AÇININ TRİGONOMETRİK ORANLARI

4.1. Dar Açının Trigonometrik Oranları

Açıların Ölçülmesi

Ansıyalım, ortak başlangıçları olan iki ışının (yarı doğrunun) birleşimi ve bu ışınların ait oldukları düzlemden ayırdıkları kısımlardan biri ile birleşimine **açı** denir. Bu anlamda ortak başlangıçları olan iki ışın OA ve OB iki açı oluşturuyorlar ve bunları $\angle AOB$ (ya da $\angle BOA$) ile işaret edeceğiz. Açılar küçük Yunan harfleriyle de işaret ediliyorlar: α, β, γ, … gibi. OA ve OB ışınlarına AOB açısının **kenarları**, O noktasına ise açının **köşesi** denilir.

Bir derece (1^0) açıların ölçü birimidir ve tam açının $\frac{1}{360}$ kısmından biridir. Dereceden küçük birimler, derecenin $\frac{1}{60}$ olan **bir dakika (1')** ve dakikanın $\frac{1}{60}$ olan ya da tam açının $\frac{1}{3600}$ kısmına eşit olan **bir saniye (1")**'dir. Bu bağıntılardan yararlanarak, dereceleri, dakikaları ve saniyeleri derece cinsinden ondalık sayı biçiminde yazabiliriz.

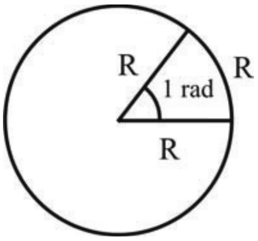
1. $14^0\,36'\,54''$ açısını ondalık sayı biçiminde yazalım.

$$14^0\,36'\,54'' = 14^0 + \left(\frac{36}{60}\right)^0 + \left(\frac{54}{3600}\right)^0 = 14^0 + 0{,}6^0 + 0{,}015^0 = 14{,}615^0. \ \blacklozenge$$

2. $72{,}568^0$ açısını derece, dakika ve saniye cinsinden yazalım

$$72{,}568^0 = 72^0 + (0{,}56\cdot 60)' = 72^0 + 33{,}9' = 72^0 + 33' + (0{,}9\cdot 60)'' = 72^0 + 33' + 54'' = 72^0\,33'\,54''.$$

Burada, açıların ölçülmesi için yeni bir ölçü birimini kabul edeceğiz. Yayının uzunluğu yarıçapına eşit olan merkez açının ölçüsüne **bir radyandır** denir ve **1 rad** ile işaret edilir (şek.1).



Şek. 1

Şimdi açıların her iki ölçüsü derece ve radyan arasındaki bağıntıyı belirtelim.

R yarıçaplı çemberin uzunluğu $2R\pi$ olduğuna göre, tam açı bütün bir çemberin merkez açısı olduğunu varsayarak, bir tam açı 2π *rad*'dır. Diğer taraftan tam açı 360^0'dir. O halde $360^0 = 2\pi$ *rad* olur. Buradan da şunları yazabiliriz:

$$1rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}29578^0 \approx 57^0\,17'\,45'' \text{ ve } 1^0 = \frac{\pi}{180}rad \approx 0{,}01745rad.$$

3. a) $110^0\ 11'\ 15''$ açısını radyanlarla ifade ediniz.

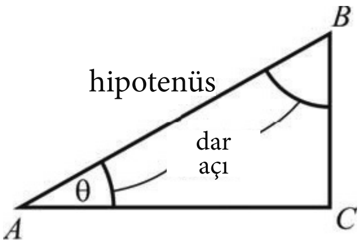
$$100^0 11^{'} 15^{''} = 100\cdot\frac{\pi}{180} + 11\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{\pi}{180} + 15\cdot\frac{1}{3600}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 1{,}7\,rad$$

b) $\frac{5\pi}{12}$ açısını derecelere dönüştürünüz.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}\cdot\frac{180^0}{\pi} = 75^0 .\ \blacklozenge$$

- Dereceleri radyanlara dönüştürmek için $\frac{\pi}{180}$, ile çarpınız.
- Radyanları derecelere çevirmek için $\frac{180}{\pi}$, ile çarpınız.

Dar Açının Sinüsü, Kosinüsü, Tanjantı ve Kotanjantı



Şek. 2

Dik üçgendeki dar açıdan yararlanarak dört temel trigonometrik fonksiyonun tanımına geçeceğiz.

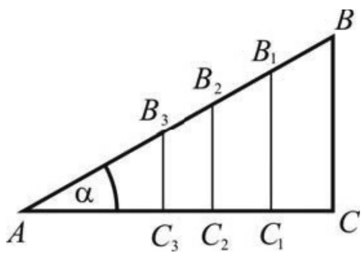
ABC üçgeninde C köşesindeki açı diktir, A ve B köşelerindeki açışlar ise dar açılardır (şek.2).

A köşesindeki açıyı θ ile işaret edersek, BC kenarına θ açısı için **karşı katet**, AC kenarına ise **komşu (yatay) katettir**.

ABC dik üçgenini ve AC kenarına dik olan B_1C_1, B_2C_2 ve B_3C_3 doğru parçalarını inceleyelim (şek.3). Bu doğru parçaları ABC üçgeniyle ortak açısı α olan $A\,B_1C_1$, $A\,B_2C_2$ ve $A\,B_3C_3$ üçgenlerinin birer karşı katetidir. Bu dik üçgenler birbiriyle dik olduklarına göre, karşılıklı kenarları da birbiriyle orantılıdır, yani:

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}};\quad \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};$$

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ ve } \frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

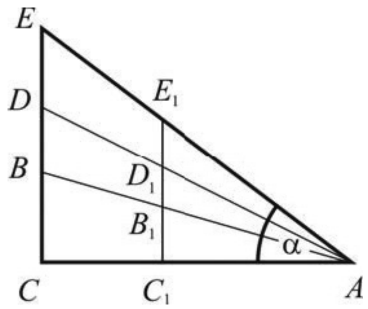


Şek. 3

Demek ki, verilen α açısı için şek. 3'teki dik üçgenlerin karşılıklı kenarların oranları sabittir.

Halbuki, α açısının büyüklüğü değişirse, bu oranların değerleri de değişecektir. Bu sonucu doğrulamak için şek. 4'te verilmiş olan $A\,B_1C_1$, $A\,D_1C_1$ ve $A\,E_1C_1$ üçgenlerini inceleyeceğiz. Bu üçgenler birbiriyle benzer değildirler, bu nedenle de onların karşılıklı kenarlarının oranları da birbirine eşit değildir, yani $\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} \neq \frac{\overline{D_1C_1}}{\overline{A_1C_1}}$. Aynısı diğer kenarlar için de geçerlidir. Demek ki α

açısının değişimi bu oranların değişmesini etkilemektedir. Buna göre, bir dik üçgende iki kenarının oranı bu üçgenin dar açısının büyüklüğüne bağlı olduğunu görüyoruz. Dar açısı verilmiş olan bir dik üçgenin kenarlarının oranı belirtilebilir ve tersine, yukarıdaki oranlardan herhangi birinin oranı verildiğinde üçgenin dar açısının büyüklüğünü belirtebiliriz. Demek ki, dik üçgende dar açılar ve kenarlar arasındaki oranlar arasında belli bağıntılar vardır, yani fonksiyonlar vardır. Bu nedenle böyle oranlara özel adlar verilmiştir:



Şek. 4

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ oranına dar açının **sinüsü** denir ve $\sin\alpha$ ile işaret edilir, yani $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ dir;

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ oranına dar açının **kosinüsü** denir ve $\cos\alpha$ ile işaret edilir, yani $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ dir;

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ oranına dar açının **tanjantı** denir ve $\sin\alpha$ ile işaret edilir, yani $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ dir;

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ oranına dar açının **kotanjantı** denir ve $ctg\alpha$ ile işaret edilir, yani $ctg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ dir;

Bir dik üçgenin kenarları ve dar açısı arasındaki bağıntıları ifade eden ve bu şekilde tanımlanan fonksiyonlara **trigonometrik fonksiyonlar** denir. Bu fonksiyonlar şu şekilde de ifade ediliyorlar:

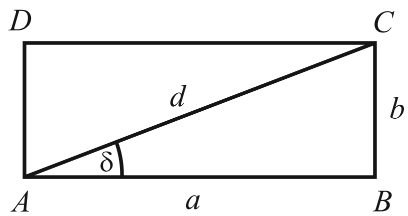
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}{\text{hipotenüs}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}}{\text{hipotenüs}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}}{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}$$

4. Şek. 5'te verilmiş olan *ABCD* dikdörtgeninde δ açısının trigonometrik oranlarını bulunuz.

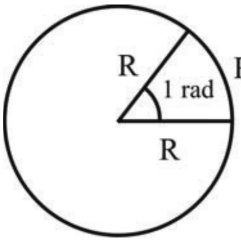
ABC dik üçgeninden şunları yazabiliriz:

$\sin\delta = \frac{b}{d}$, $\cos\delta = \frac{a}{d}$, $tg\delta = \frac{b}{a}$, $ctg\delta = \frac{a}{b}$. ♦



Şek.5

5. Katetleri 3 *cm* ve 4 *cm* olan bir dik üçgen veriliyor. Bunun dar açılarının trigonometrik fonksiyonlarını bulunuz (şek.6).



Şek. 6

Pitagor teoremini uygulayarak hipotenüsü belirtiyoruz.
$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, yani $c = 5$'tir.
O halde

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad tg\alpha = \frac{3}{4} \qquad ctg\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} \qquad tg\beta = \frac{4}{3} \qquad ctg\beta = \frac{3}{4}. \blacklozenge$$

Trigonometrik fonksiyonları sinüs ve kosinüs sıfır ve dik açı için de şu şekilde tanımlanabilir:

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Benzer şekilde $tg0 = 0$, $ctg\frac{\pi}{2} = 0$, fakat $tg\frac{\pi}{2}$ ve $ctg\,0$ tanımlı değildir.

Alıştırmalar

1. Tabloyu defterinizde çiziniz ve doldurunuz.

Derece	0^0	30^0		60^0		180^0		360^0
Radyan			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	

Katetleri a ve b verilmiş olan dik üçgende β açısının trigonometrik fonksiyonlarını bulunuz.

2. $a = 5$, $b = 12$; **3.** $a = 3$, $b = 5{,}2$.

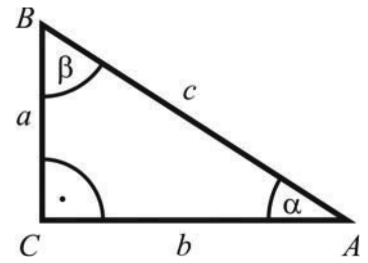
Kateti a ve hipotenüsü c verilmiş olan dik üçgende α açısının trigonometrik fonksiyonlarını bulunuz.

4. $a = 8$, $c = 10$; **5.** $a = 9{,}8$, $c = 12{,}6$.

4.2. Bazı Açıların Trigonometrik Fonksiyonlarının Değerlerinin Hesaplanması

Geometride birçok ödevleri çözerken 30°, 45° ve 60° açılarının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerinden yararlanıyoruz. Bu gibi fonksiyonların trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini hesaplamak için, tümler açıların özelliklerinden de yararlanacağız.

Hatırlayalım: Toplamı 90^0 olan açılara tümler açılar denir. Dik üçgende iki dar açı tümler açılardır. Niçin? ABC üçgeninde (şek.7) α açısı dar açılardan biri ise $\beta = 90^0 - \alpha$ açısı onun tümleyenidir. α açısı radyanlarla verildiğinde $\frac{\pi}{2} - \alpha$ açısı onun tümleyenidir. Daha da, *a* kenarı α açısına karşı katettir ve β açısına yatay katetttir, *b* kenarı ise α açısına yatay katettir ve β açısına karşı katetttir. Buna göre, α ve β açılarının trigonometrik fonksiyonları için ($\alpha \neq 0^0$ ve $\beta \neq 0^0$) aşağıdakiler geçerlidir:



Şek. 7

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = ctg\beta, \quad ctg\alpha = \frac{b}{a} = tg\beta,$$

$$\boxed{\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha),\ \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha),\ tg\alpha = ctg(90 - \alpha),\ ctg\alpha = tg(90^0 - \alpha)}.$$

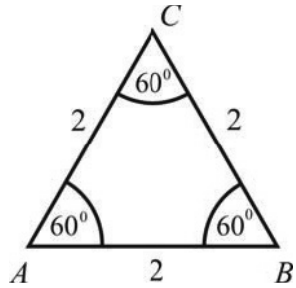
1. Örnek, $70^0 = \sin(90^0 - 70^0) = \sin 20^0$; $\sin 10^0 = \cos(90^0 - 10^0) = \cos 80^0$;

$$tg\frac{\pi}{6} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = ctg\frac{\pi}{3}; \quad ctg\frac{\pi}{6} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{3}. \ \blacklozenge$$

Kenar uzunluğu 2 birim olan ABC eşkenar üçgenini inceleyelim (şek.8). A köşesinden indirilen AD yüksekliği, aynı zamanda üçgenin A köşesinden geçen açı ortayı ve BC karşı kenarın orta dikmesidir. Buna göre,

$$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \text{ ve } \quad \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle CAB) = \frac{1}{2}(60^0) = 30^0.$$

dir.



Şek. 8

ABD dik üçgenine Pitagor teoremini uygulayarak (şek.9)

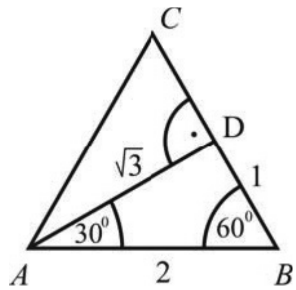
$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ veya $\overline{AD}^2 + 1^1 = 2^2$. elde edilir.

Ona göre $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, yani $\overline{AD} = \sqrt{3}$.

Şimdi, ABD dik üçgeninde trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplayabiliriz:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2};$$

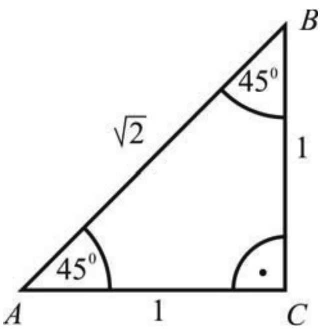
$$\cos 30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



Şek. 9

$$tg30^0 = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}; \qquad tg30^0 = ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$ctg30^0 = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}; \qquad ctg30^0 = tg60^0 = \sqrt{3}.$$



Şek. 10

45^0 açısının trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplamak için katetleri 1 birim olan bir ikizkenar dik üçgen çizeceğiz (şek.10). Bu üçgenin dar açıları 45^0'dir.

Pitagor teoremi gereğince, hipotenüsü $|AB| = \sqrt{2}$ dir. Trigonometrik fonksiyonların tanımından

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0 \text{ ve } tg45^0 = \frac{1}{1} = 1 = ctg45^0.$$

Trigonometrik fonksiyonların elde edilen değerlerini bir tabloda göstrelim:

Derece	Radyan	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

2. $\cos 45^0 \bullet \cos 30^0 - \sin 45^0 \bullet \sin 30^0$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. ♦$$

3. $\alpha = 30^0$ için $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \sin\alpha}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{\cos 2 \cdot 30^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \sin 30^0} = \frac{\cos 60^0}{1 + \cos 60^0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}. ♦$$

Alıştırmalar

1. Hesaplayınız:

a) $\cos 57^0$ yi $\sin 33^0$ ile; b) $\sin 77,77^0$ yi $\cos 12,23^0$ ile;

c) $\mathrm{c}tg\dfrac{5\pi}{18}$ yi $\mathrm{tg}\ \dfrac{2\pi}{9}$ ile; d) $tg\left(\dfrac{\pi}{2}-1,087\right)$ yi $\mathrm{ctg}\ 1,0785$.

2. Verilenlerden α açısını hesaplayınız:

a) $\cos(\alpha +10^0) = \sin 20^0$ b) $tg35^0 = ctg\ (\alpha\ -15^0)$.

3. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0$; b) $\dfrac{\sin 30^0 + 1}{1+\cos 60^0}$; c) $\dfrac{tg30^0 + ctg45^0}{ctg60^0 + tg45^0}$.

4. Hesaplayınız:

a) $2\cdot\cos 30^0\cdot\cos 45^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$; b) $\sin^2 30^0 + tg^2 60^0\cdot\sin 30^0\cdot\cos 60^0$.

5*. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $\dfrac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0}$; b) $\dfrac{ctg60^0 + tg45^0}{1-tg60^0\cdot tg45^0}$; c) $\dfrac{4\sin^2 45^0 + 1}{ctg^2 30^0}$.

6. Verilenlerden α açısının değerini hesaplayınız:

a) $tg\alpha = 1$; b) $ctg\alpha = \sqrt{3}$;

c) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; e) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.3. Hesap Makinesini Kullanarak Trigonometrik Fonksiyonların Değerlerinin Hesaplanması

$\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ ve $\dfrac{\pi}{2}$ açıları için trigonometrik fonksiyonların değerlerinin bulunması kolay olduğunu gördük. Fakat herhangi açı için trigonometrik fonksiyonların değerlerinin bu şekilde bulunması mümkün değildir. Böyle durumlarda değerleri tablolar yardımıyla ya da hesap makinesi kullanarak belirtiyoruz.

Hesap makinelerinin çoğunda dakikaları ve saniyeleri derecelere dönüştüren (° ' ") ya da (DMS) ile işaretlenmiş tuşlar vardır (degrees – minutes- seconds).

Örneğin, $32^0\ 45'\ 10''$ açısını derecelerle ifade etmek istersek, şu şekilde hareket edeceğiz: Hesap makinesinde 32 yazdıktan sonra tuşa basarız,ondan sonra 45 yazarak yine tuşa basıyoruz ve sonunda 10 yazıp tuşa bastıktan sonra $32{,}7527778^0$ elde edilir.

Ondalık sayı biçiminde dereceli bir açı verildiğinde, onu derece, dakika ve saniye biçiminde ifade etmek istiyorsak, herhangi bir işlemin tersini yapan ve genellikle sarı renkte olan $\boxed{2^{ndf}}$ ya da $\boxed{\text{inv}}$ işaretli tuşlardan yararlanıyoruz. Ondalık sayıyı yazdıktan sonra, önce sarı renkte olan adı geçen tuşa basılır ve ondan sonra $\boxed{{}^{o}\ '\ ''}$ tuşuna basılır.

Hesap makinelerinin çoğu iki durumda çalışır: Biri, *deg* durumu, açılar ondalık sayılı derecelerle verildiğinde ve *rad* durumu, açılar radyanlarla verilmiş olduğu durumlar için.

Hesap makinesi yardımıyla verilen açıların trigonometrik fonksiyonlarının değerleri bulunur ve tersine, verilen trigonometrik fonksiyonun değerine karşılık gelen açı bulunur. Bu işlemleri şu iki örnekte inceleyeceğiz:

1. Hesap makinesi kullanarak hesaplayınız:

a) $\sin 41{,}3^0$; b) $\cos 19^0 21' 17''$; c) $tg\,\dfrac{5\pi}{36}$.

a) Önce hesap makinesini *deg* durumuna yani *deg* tuşuna basarak derecelerle işlemler yapacak durumuna getiriyoruz. Ondan sonra $41{,}3^0$ yazılır. Ondan sonra $\boxed{sin}$, tuşuna basmakla $sin 41{,}3^0$ değeri elde edilir.

$41{,}3^0 \longrightarrow \boxed{sin} = 0{,}660017.$

b) Önce $19^0\ 21'\ 17''$ açısını, ondalık sayı şeklinde derecelerle ifade etmeliyiz. Ondan sonra a) şıkkında hareket edildiği gibi işlemler yapılır.

$$19^0\,21'17'' = 19^0 + \left(\frac{21}{60}\right)^0 + \left(\frac{17}{3600}\right)^0 = 19{,}354722^0;$$

$19{,}354722^0 \longrightarrow \boxed{cos} = 0{,}943484853.$

c) Genel olarak hesap makinesini radyan durumunda koyarız. Ondan sonra $\boxed{\pi}$ tuşuna basarak (böylece 3,141592654 değerini yazmış oluyoruz) Bunu 5 ile çarpar 36 ile böleriz ve sonunda ($\boxed{tan}$) tuşuna basarız. Bununla istenilen sonucu elde etmiş oluyoruz.

$tg\,\dfrac{5\pi}{36} = 0{,}466307658.$ ♦

2. Hesap makinesi yardımıyla verilenlerden α açısını belirtiniz.

a) $\sin\alpha = 0{,}74281$; b) $\cos\alpha = 0{,}23849$; c) $tg\alpha = 3{,}8611$.

a) Hesap makinesi *deg* durumunda getirilir. $\sin\alpha = 0{,}74281$ değeri yazılır ve $\boxed{\text{inv}}$ (ya da $\boxed{2^{ndf}}$ tuşuna basılır ve ondan sonra $\boxed{sin}$. tuşuna basılır. Elde edilen sonuç $\alpha = 479713$'dir.

$0{,}74281 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{sin} = 47{,}9713^0.$

Bunu, derece ile ifade edersek a = 57⁰ 58' 17" elde edilir.

Hesap makinesinde $\boxed{sin^{-1}}$ tuşu varsa, şu şekilde hareket edilir:

a) $0{,}74281 \longrightarrow \boxed{sin^{-1}} = 47{,}9713\,^0.$

b) $0{,}23849 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{cos} = 76{,}2026^0;\quad \alpha = 76^0 12' 9''.$

c) $3{,}82611 \longrightarrow \boxed{inv} \longrightarrow \boxed{tg} = 75{,}3527^0;\quad \alpha = 75^0 21' 10''.$ ♦

Alıştırmalar

Hesap makinesi kullanarak verilen her açının trigonometrik fonksiyonlarının değerini hesaplayınız:

1. a) 48^0; b) $23^0 12' 23''$; c) $16{,}19^0$.

2. a) $\frac{2\pi}{7}$; b) $\frac{5\pi}{21}$.

3. Hesap makinesi kullanarak verilenlerden α açısını belirtiniz:

a) $\sin\alpha = 0{,}58362$; b) $\cos\alpha = 0{,}71419$; c) $tg\alpha = 2{,}4183$;

ç) $\sin\alpha = \frac{4}{9}$; d) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$; e) $ctg\alpha = \frac{4}{13}$.

4. $\alpha = 34^0\, 28'$ için, verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

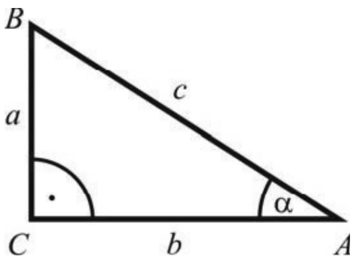
a) $\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}$; b) $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$.

5*. Verilenlerden α açısını belirtiniz:

a) $\sin\alpha = tg23^0 37'$; b) $\cos\alpha = 5 \bullet \sin 11^0$; c) $tg\alpha = \sin 32^0 19' + \cos 59^0 25'$.

4.4. Aynı Açının Trigonometrik Fonksiyonları Arasındaki Temel Bağıntılar

ABC dik üçgeninde (şek.11), $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısının geçerli olduğunu artık biliyorsunuz. Bu eşitlik c^2 ile bölündüğünde $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$ ve $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ ya da



Şek. 11

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$ elde edilir.

$\frac{a}{c}=\sin\alpha$ ve $\frac{b}{c}=\cos\alpha$ olduğuna göre, bunları son eşitlikte değiştirmekle

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \qquad (1)$$

elde edilir.

1. Örnek, a = 30^0 için eşitliği yoklayalım.

$\sin^2 30 + \cos^2 30$ $\sin^2 30+\cos^2 30=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1.$ ♦

(1) eşitliğinden yararlanarak, herhangi bir dar açının sinüsünü, aynı açının kosinüsüyle ifade edebiliriz ve tersine:

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ve $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

2. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ olduğuna göre $\cos\alpha$ 'yı hesaplayınız.

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$ ♦

3. $(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Bu örnekle (1) eşitliğinden yararlanarak bazı ifadelerin nasıl sadeleştirildiğini göstereceğiz.

$(1 + \cos\alpha) \bullet (1 - \sin\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$ ♦

ABC dik üçgeninden (şek.11) $tg\alpha=\frac{a}{b}$ ve $ctg\alpha=\frac{b}{a}$ olduğunu yazabiliriz.

Bu eşitliklerin pay ve paydalarını c ile bölersek ($c \neq 0$ $c \neq 0$)

$$tg\alpha=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \text{ ve } ctg\alpha=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}. \qquad (2)$$

elde edilir.

$tg\,\alpha$ ve $ctg\,\alpha$ birbiriyle çarpıldığında bir eşitlik daha elde edilir:

$$\boxed{tg\alpha\cdot ctg\alpha=1} \qquad (3)$$

4. Doğrudan doğruya hesaplayarak, eşitliği bir örnekle doğrulayalım.

$$tg60^0 \cdot ctg60^0 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = \frac{3}{3} = 1 .$$ ♦

5. $ctg\,\alpha = 2$ olduğuna göre $tg\,\alpha$'yı hesaplayınız.

$tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha} = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$ elde edilir. ♦

Trigonometrik fonksiyonların dar açılar için (1), (2) ve (3) temel bağıntılarından yararlanarak, bunlardan sadece biri bilindiği takdirde, diğer fonksiyonların da değerlerini belirtebiliriz.

6. $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ olduğuna göre $cos\ \alpha$'yı hesaplayınız.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} .$$ ♦

7. $tg\ \alpha = 2$ olduğuna göre, α açısı için diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplayınız.

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ eşitliğinden $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ gerekir, oradan da $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ elde edilir. Diğer taraftan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ve $(2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha = 1$ yazabiliriz. Oradan $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ ve sonunda $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ elde edilir. Ondan sonra,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ve } ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{2} .$$ ♦

Alıştırmalar

1. Verilene göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplayınız:

a) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; b) $\cos\alpha = 0{,}25$; c) $tg\alpha = \dfrac{4}{5}$; ç) $ctg\alpha = 0{,}41$.

2. Verilen ifadeleri sadeleştiriniz:

a) $1-\cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha - 1$; c) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

3. İspatlayınız:

a) $\sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha = 1$; b) $\sin^2\alpha \cdot \left(1+ctg^2\alpha\right) + \cos^2\alpha \cdot \left(1+tg^2\alpha\right) = 2$.

4. Her dar açı α için aşağıdakiler geçerlidir:

a) $tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = tg^2\alpha - \sin^2\alpha$;   b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$;

c) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = tg\alpha - ctg\alpha$;

5*. Her dar açı α için aşağıdakiler geçerli olduğunu ispatlayınız:

a) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$;   b) $\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2.$

6. $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ olduğuna göre, $\dfrac{5\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}$ hesaplansın.

7. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ olduğuna göre, $4tg\alpha$ - $3\sin\alpha$ hesaplansın.

4.5. Dik Üçgenin Çözümü

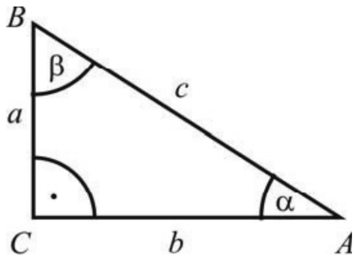
a, b ve *c* bir *ABC* dik üçgenin kenarları, α ve β onun dar açıları olsun (şek 12). O halde,

$\alpha + \beta = 90^0$ dhe $a^2 + b^2 = c^2$ geçerlidir.

Trigonometrik fonksiyonların tanımından da,

$\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, $\dfrac{b}{c} = \cos\alpha$, $\dfrac{a}{b} = tg\alpha$

$\dfrac{a}{c} = \cos\beta$, $\dfrac{b}{c} = \sin\beta$, $\dfrac{a}{b} = ctg\beta$



Şek. 12

geçerli olduğunu biliyoruz. Bu bağıntılardan yararlanarak,

- bir kenar ve bir dar açı;
- iki kenar.

verildiğinde üçgenin temel elemanlarını (kenarlarını ve açılarını) hesaplayacağız.

Bir dik üçgen çözülsün denilince, elemanlardan en az biri kenar olmak üzere verilenlere göre, tüm temel elemanların belirtilmesini anlayacağız.

1. Hipotenüsü $c = 93$ *cm* ve açısı $\alpha = 42^0\ 23'$ verilmiş olan dik üçgen çözülsün.

Her iki kateti *a* ve *b* ile β dar açısını hesaplamamız gerekir.

Açıyı hemen $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 42^0\ 23' = 47^0\ 37'$ olduğunu buluyoruz.

a katetini hesaplamak için önce $\sin 42{,}3833^0 = 0{,}67409$ olduğunu buluyoruz, ondan sonra $a = c \bullet \sin\alpha = 93 \bullet 0{,}67409 \approx 63$, yani $a \approx 63$ *cm* elde edilir. *b* katetini, hipotenüs ve α açısının kosinüsüyle yardımıyla belirteceğiz, ya da Pitagor teoreminden yararlanarak hesaplayacağız.

I. yöntem.$b = c \bullet \cos\alpha = 93 \bullet \cos 42,3833^0 = 93 \bullet 0,7386$, yani $b \approx 69$ *cm* dir.

II. yöntem. $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69\,cm.$ ◆

2. Katetleri $a = 21$ *cm* ve $b = 15$ *cm* olan dik üçgen çözülsün.

Üçgenin hipotenüsünü ve iki dar açısını hesaplamamız gerekir. Hipotenüsü Pitagor teoreminden yararlanarak hesaplayacağız:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25\,cm.$$

α açısını tanjant fonksiyonu yardımıyla belirteceğiz, yani $tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1,4$ olduğuna göre $\alpha \approx 54^0\ 28'$ bulunur. β açısı için: $\beta = 90^0 - \alpha \approx 90^0 - 54^0 28'$, yani $\beta \approx 35^0 32'$. ◆

3. Kateti $b = 53$ *cm* ve açısı $\beta = 64^0$ verilmiş olan dik üçgen çözülsün.

Ödevin koşulları gereğince üçgenin diğer dar açısını, katetini ve hipotenüsünü belirtmemiz gerekir. Hesaplıyoruz: $\alpha = 90^0 - \beta = 90^0 - 64^0 = 26^0$;
$a = b \bullet \text{tg}\,\alpha = 53 \bullet \text{tg}26^0 = 53 \bullet 0,48773 \approx 26$ yani, $a \approx 26$ *cm*'dir. $b = c\,sin\,\beta$ eşitliğinden
$c = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{53}{\sin 64^\circ} \approx \frac{53}{0,89879}$, ya da $c \approx 59$ *cm* olduğunu buluyoruz. ◆

4. Kateti $a = 37$ *cm* ve hipotenüsü $c = 48$ *cm* verilmiş olan dik üçgen çözülsün.

α ile β dar açıları ve b kateti hesaplansın.

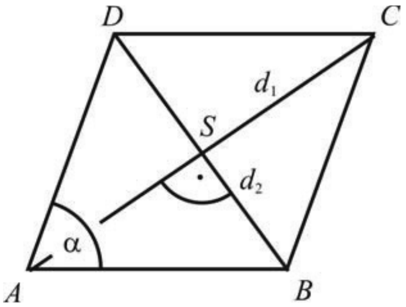
$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{37}{48} = 0,77083$ olduğundan $\alpha \approx 50,42878^0$ elde edilir, oradan da $\alpha \approx 50^0 25' 44'$ bulunur. $\beta = 90^0 - \alpha \approx 39^0\ 34'\ 16''$ dir. $b = c \bullet \sin\ \beta = 48 \bullet \sin 39^0\ 34\ 16'' \approx 48 \bullet 0,63704 \approx 31$, yani $b \approx 31$ *cm* olduğunu buluyoruz. ◆

Dik üçgenin çözümü, geometride ve günlük hayattan çeşitli problemlerin çözümünde büyük uygulamaları vardır. Bu uygulamaları birkaç örnekle göstereceğiz.

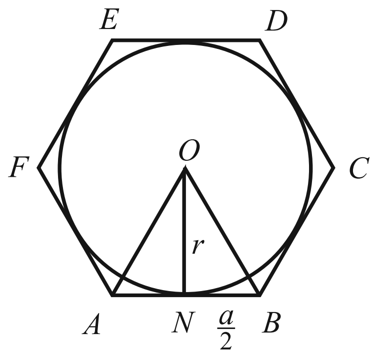
5. Bir dar açısı $\alpha = 66^0$ ve bir köşegeni $d_1 = 34$ *cm* olan eşkenar dörtgenin kenarını hesaplayınız.

A köşesindeki açı α ve aynı köşeden çizilen köşegen d_1 verilmiş olsun (şek.13). *ABS* dik üçgeninden:

$$\frac{d_1}{2} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}; \quad 17 = a \cdot \cos 33^0; \qquad a = \frac{17}{\cos 33^\circ} = \frac{17}{0{,}83863} \approx 203\,cm. \ \blacklozenge$$



Şek.13



Şek.14

6. İçten teğet çemberinin yarıçapı r = 12 *cm* verilmiş olan düzgün altıgenin kenarını hesaplayınız.

Şek. 14'te *ABCDEF* düzgün altıgeni çizilmiştir. *ABO* üçgeni eşkenardır. *BON* açısı 30^0'dir. *NBO* dik üçgeninden

$$\frac{a}{2} = r \cdot tg30^\circ \approx 12 \cdot 0{,}57735 \approx 6{,}9282; \quad a \approx 13{,}85cm.$$

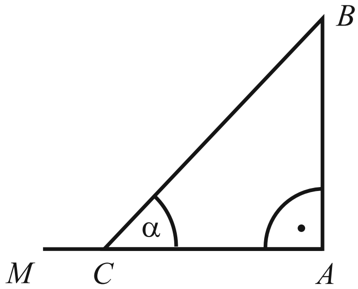
elde edilir. ♦

7. Bir ırmağın iki farklı tarafında bulunan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız (şek.15).

A noktasında *BAM* dik açısını çiziyoruz. Bu açının köşesini *C* ile işaret ettikten sonra *ACB* açısını ölçüyoruz. Elde edilen açının büyüklüğü $\alpha = 49^0$ olsun. *A* ve *C* noktaları arasındaki uzaklığı ölçüyoruz; bu uzaklık $d = 28\ m$ olsun. O halde:

$$\overline{AB} = d \cdot tg\alpha = 28 \cdot tg49^0 \approx 28 \cdot 1{,}15037 \approx 32,$$

$$\overline{AB} \approx 32\,m. \ \blacklozenge$$



Şek. 15

Alıştırmalar

Verilenlere göre *ABC* üçgenini çözünüz:

1. a) $\alpha = 36{,}2^0,\ c = 68cm;$ b) $\beta = 15{,}8^0,\ c = 12{,}2cm;$ c) $\beta = 65{,}4^0,\ a = 2{,}25cm.$

2. a) $\alpha = 82^0,\ b = 246cm;$ b) $\beta = 48^0\,30',\ b = 74{,}7\,cm;$ c) $\alpha = 24^0,\ a = 5{,}25cm.$

3. a) $a = 230cm,\ c = 320cm;$ b) $a = 52{,}5cm,\ b = 28cm;$ c) $b = 3{,}9cm,\ c = 4{,}5cm.$

4. Bir çemberin yarıçapı 13*cm* ve bir *AB* kirişi 10 *cm*'dir. *AOB* açısının ölçüsünü (büyüklüğünü) hesaplayınız.

5. Bir ikizkenar yamuğun yüksekliği 6*cm*, tabanların uzunlukları ise 4*cm* ve 20*cm*'dir. Yamuğun açılarını hesaplayınız.

6*. *A* noktasından 4000*m* dikey yükseklikte bir uçak bulunuyor. O anda uçaktan 17^0 depresyon açısıyla alanda B noktası görülüyor. Uçak B yerinden ne kadar uzaklıktadır ve *A* ve *B* noktaları arasındaki uzaklık ne kadardır?

4.6. Konu Pekiştirme Alıştırmaları

1. Verilen açıları, derece, dakika ve saniye cinsinden ifade ediniz:

a) $34{,}41^0$; b) $18{,}27^0$; c) $23{,}67^0$.

2. Verilen açıları derece olarak ifade ediniz:

a) $36^0 25' 36''$; b) $45^0 11' 19''$; c) $73^0 52' 25''$.

3. Verilen açıları radyanlarla ifade ediniz:

a) 25^0; b) $62^0 15'$; c) $35^0\, 5' 38''$.

4. Radyanlarla verilmiş olan açıları derecelere dönüştürünüz:

a) $\frac{7\pi}{12}$; b) 1,27; c) 0,45.

5. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $\frac{\sin 30^0 - \cos 30^0}{5ctg60^0 tg30^0}$; b) $\frac{tg45^0}{2\cos^2 30^0 - 1}$; c) $\frac{tg\alpha \cdot ctg\alpha}{1-\cos\alpha}$, за $\alpha \neq 0$.

6. Verilenlerden α açısını belirtiniz:

a) $\sin\alpha = \cos 65^0$; b) $\cos\alpha = \sin 42^0 50'$;

c) $\sin(\alpha + 20^0) = \sin 50^0$; d) $tg(\alpha - 15^0) = ctg(\alpha + 25^0)$.

7. Trigonometrik fonksiyonlarından biri verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirtiniz:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; b) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; c) $tg\alpha = \frac{3}{5}$; d) $ctg\alpha = \frac{7}{25}$.

8. Verilen ifadenin değerini hesaplayınız:

a) $4tg\alpha + 5\cos\alpha$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, $tg\alpha = 2$.

9. Verilenlere göre *ABC* üçgenini çözünüz:

a) $\alpha = 36^0 2'$, $c = 68$; b) $\beta = 64^0 20'$, $a = 450$; c) $\beta = 85^0 10'$, $b = 0{,}62$;

d) $a = 230$, $c = 320$; e) $b = 3{,}9$, $c = 42{,}5$.

10. Bir ikizkenar yamuğun tabanı *a*, yan kenarı *c* ve tabanına ait açısı α açısı verilmiştir. Yamuğun diğer tabanını ve yüksekliğini hesaplayınız:

11*. Hareket eden bir vapurdan deniz feneri $25{,}6^0$ açıyla gözükür. Vapur, karaya 1050 *m* yaklaşınca bu açı $31{,}2^0$ olur. Deniz feneri suyun yüzeyinden hangi yüksekliktedir?

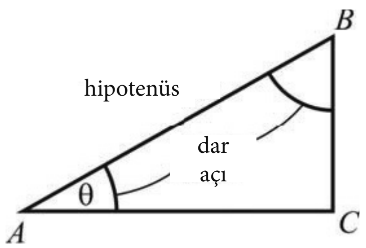
Konu Özetleri

Bir derece (1^0) açıların ölçülmesi için, büyüklüğü tam açının $\frac{1}{360}$ kısmı olarak tanımlanmış ölçü birimidir. Dereceden küçük birimler, derecenin $\frac{1}{60}$ olan **bir dakika (1')** ve dakikanın $\frac{1}{60}$ olan ya da tam açının $\frac{1}{3600}$ kısmına eşit olan **bir saniye (1")**'dir.

Yayının uzunluğu yarıçapına eşit olan merkez açının ölçüsüne **bir radyandır** denir ve **1 rad** ile işaret edilir.

İki birim, derece ve radyan arasındaki bağıntı $\boxed{360^0 = 2\pi\, rad}$ formülüyle verilir.

Dik üçgendeki dar açıdan yararlanarak dört temel trigonometrik fonksiyonun tanımına geçeceğiz.



ABC üçgeninde *C* köşesindeki açı diktir, *A* ve *B* köşelerindeki açışlar ise dar açılardır (şek.2).

A köşesindeki açıyı θ ile işaret edersek, *BC* kenarına θ açısı için **karşı katet** , *AC* kenarına ise **komşu (yatay) katettir**.

Bir dik üçgenin kenarları ve dar açısı arasındaki bağıntıları ifade eden ve bu şekilde tanımlanan fonksiyonlara **trigonometrik fonksiyonlar** denir. Bu fonksiyonlar şu şekilde de ifade ediliyorlar:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}{\text{hipotenüs}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}}{\text{hipotenüs}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\alpha \text{ ya ait yatay durumlu katet}}{\alpha \text{ ya ait karşı durumlu katet}}$$

Aşağıdaki tabloda bazı açıların trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini gösterilmiştir:

Dereceler	Radyanlar	*sin*	*cos*	*tg*	*ctg*
0^0	0	0	1	0	/
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	/	0

α açısı bir dik üçgenin dar açısı olduğu durumda, aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1}$$

a, b ve *c* bir *ABC* dik üçgenin kenarları, α ve β onun dar açıları ise trigonometrik fonksiyonların tanımından şu bağıntılar geçerlidir:

$$\boxed{\frac{a}{c} = \sin\alpha}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \cos\alpha}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = tg\alpha}$$

$$\boxed{\frac{a}{c} = \cos\beta}, \quad \boxed{\frac{b}{c} = \sin\beta}, \quad \boxed{\frac{a}{b} = ctg\beta}$$

Bu bağıntılardan yararlanarak,

- bir kenar ve bir dar açı;
- iki kenar

verildiğinde üçgenin temel elemanlarını (kenarlarını ve açılarını) hesaplayacağız.

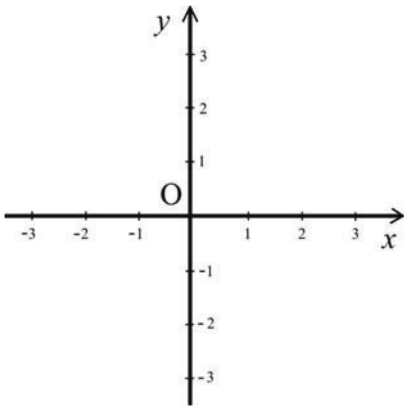
Bir dik üçgen çözülsün denilince, elemanlardan en az biri kenar olmak üzere verilenlere göre, tüm temel elemanların belirtilmesini anlayacağız.

5 DÜZLEMDE DOĞRU

5.1. Düzlemde Dik Açılı Koordinat Sistemi

Sayı doğrusu üzerinde her noktanın durumu sadece bir x reel sayısı ile tamamen bellidir ve bu sayıya **noktanın koordinatı** denir. Benzer şekilde, koordinat sisteminden yararlanarak, düzlem üzerinde her noktanın durumu reel sayılardan oluşan ve **noktanın koordinatları** diye adlandırılan bir (x, y) sıralı çiftiyle tamamen belli olduğunu göstereceğiz.

Dik açılı koordinat sistemi, birbirine göre dik olan ve **koordinat eksenleri** diye adlandırılan iki eksenden oluşur. İki eksenin kesiştiği noktaya **koordinat başlangıcı** ya da **orijin** denir ve O ile işaret edilir. Yatay eksene x- ekseni ya da **apsis ekseni**, dikey eksene ise y- ekseni ya da **ordinat ekseni** denir. Koordinat sisteminin ait olduğu düzleme **koordinat düzlemi** denir.



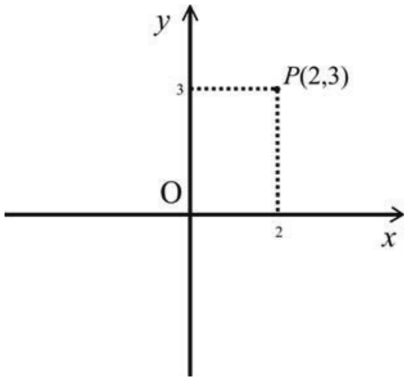
Şek. 1

Genel olarak her iki koordinat ekseninde aynı birim uzunluk kullanılır. Koordinat başlangıcının sağ taraftaki yönü x- ekseninin pozitif yönü, koordinat başlangıcından yukarıya doğruya olan yön ise y- ekseninin pozitif yönü sayılır.

P koordinat düzleminde herhangi bir nokta, *M* ve *N* noktaları ise sırasıyla x= ve y= eksenlerine *P* noktasının izdüşümleri olsun. M noktasına x- ekseni üzerinde sadece bir tek x reel sayısı karşılık gelir. Benzer şekilde M noktasına y- ekseni üzerinde sadece bir tek y reel sayısı karşılık gelir. Buna göre *P* noktasının durumu reel sayılardan oluşan bir (x, y) sıralı çiftiyle tamamen bellidir. Bu sıralı çifte *P* noktasının **koordinatları** denir. Bu durumda x sayısına **birinci koordinat** ya da **apsis**, y sayısına ise **ikinci koordinat** ya da **ordinat** denir ve $P(x, y)$ biçiminde işaret edilir.

1. $P(-3, 6)$ noktasının birinci koordinatı $x = -3$ ve ikinci koordinatı ise $y = 6$'dır.

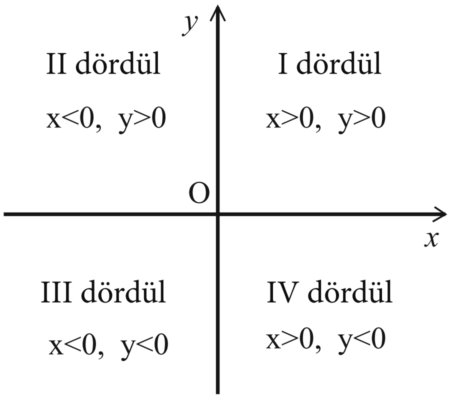
P (x, y) noktasını çizmek, ya da koordinat sisteminde göstermek, *P* noktasından geçen ve koordinat eksenlerine paralel olan doğruların kesişim noktasını belirtmek demektir.



Şek. 2

2. $P(2,3)$ noktasını çiziniz.

Koordinatı 2 olan noktadan x – eksenine dikme çizilir. Benzer şekilde y- ekseninde koordinatı 3 olan noktadan y- eksenine dikme çizilir. Dikmelerin kesişim noktası, aranılan noktadır (şek.2).



Şek. 3

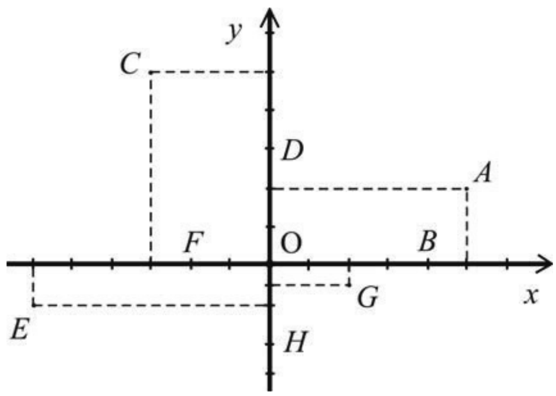
Koordinat eksenleri, düzlemi **dördüller** denilen dört kısma ayırıyorlar. **I dördül** olarak üst sağ kısım, **II dördül** üst sol kısım, **III dördül** alt sol kısım ve **IV dördül** alt sağ kısım olarak alınır. O halde herhangi bir $P(x, y)$ noktası I- dördülde ise $x > 0$ ve $y > 0$ olur; II- dördülde ise $x < 0$ ve $y > 0$ olur; III- dördülde ise $x < 0$ ve $y < 0$ olur; IV- dördülde ise $x > 0$ ve $y < 0$ olur; $y = 0$ eğer nokta x ekseni üzerinde ise; $x = 0$ eğer nokta y ekseni üzerinde ise. Koordinat başlangıcı hem x hem de y üzerinde olduğuna göre onun koordinatları $O\ (0,0)$ olur (şek.3).

3. Verilen noktaları koordinat düzleminde belirtiniz:

a) $A(5,2)$; b) $B(4,0)$; c) $C(-3,5)$; d) $D(0,3)$;

e) $E(-6,-1)$; f) $F(-2,0)$; g) $G\left(2,-\frac{1}{2}\right)$; h) $H(0,-2)$,

ondan sonra, biri hangi dördüle ya da eksene ait olduğunu belirtiniz.



Şek. 4

a) $A(5, 2)$ noktası I – dördüle aittir.
b) $B(4, 0)$ noktası x- ekseni üzerindedir.
c) $C(-3, 5)$ noktası II – dördüle aittir.
d) $D(0, 3)$ noktası y- ekseni üzerindedir.
e) $E(-6, -1)$ noktası III – dördüle aittir.
f) $F(2, 0)$ noktası x- ekseni üzerindedir.
g) $G(2,-\frac{1}{2})$ noktası IV – dördüle aittir.
h) $H(0, -2)$ noktası y- ekseni üzerindedir.

Alıştırmalar

1. Verilen noktalardan her biri hangi dördüle ya da eksene ait olduğunu belirtiniz:

a) $A(3,-4)$; b) $B(-1,1)$; c) $C(-3,-5)$; d) $D(2,3)$;

e) $E(-6,0)$; f) $B\left(0,-\frac{3}{2}\right)$; g) $G\left(\frac{1}{2},0\right)$; h) $H(0,-1)$.

A(1,3), B(-2,4), C(5,-2) ve *D(-3,-1)* noktalarının :

2. *x*- ekseni üzerinde; **3.** *y*- ekseni üzerinde
M, N, P ve *Q* izdüşümlerinin koordinatlarını belirtiniz.

4. Uç noktalarının koordinatları *A(1,4)* ve *B(5,2)* olan *AB* doğru parçasını çiziniz. Ondan sonra, doğru parçasının *x*- ekseni ve *y*- ekseni üzerinde sırasıyla m_x ve m_y dik izdüşümlerinin uzunluklarını belirtiniz.

*5**. Köşelerinin koordinatları verilmiş olan ABC üçgenini çiziniz: A(1, -3), B(5, 2) ve C $(0, -\frac{1}{2})$.

5.2. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

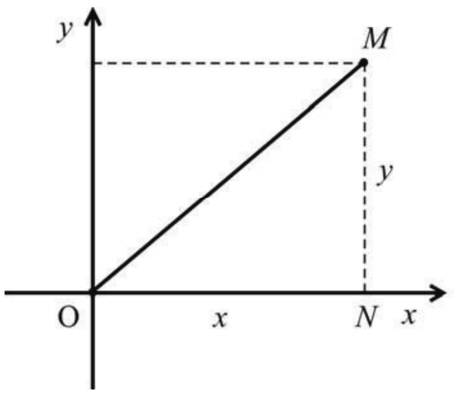
Bu derste, koordinat düzleminde bulunan iki nokta arasındaki uzaklık problemini analitik yöntemlerle çözeceğiz. Verilen iki nokta M_1 ve M_2 noktaları arasındaki uzaklık, aslında M_1M_2 doğru parçasının uzunluğudur, yani $d = \overline{M_1 M_2}$ 'dir.

Önce daha basit bir durumu çözeceğiz. Uç noktalardan biri koordinat başlangıcında olsun (şek.5). *M(x,y)* noktasından *x*- eksenine çizilen dikmenin dikme ayağı *N* olsun. *ONM* dik üçgeninden Pitagor teoremi gereğince

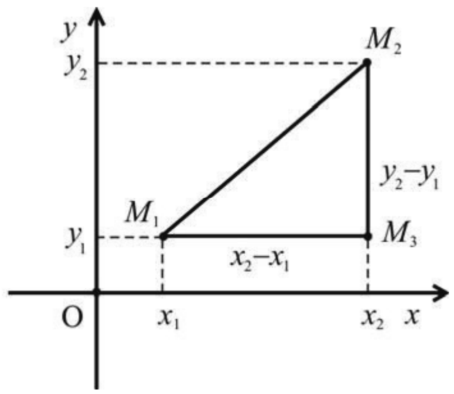
$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$ dir.

1. *M(3,4)* noktasından koordinat başlangıcına olan uzaklığı ne kadardır?

$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ elde edilir.



Şek. 5



Şek. 6

Şimdi genel durumu inceleyelim. Aralarındaki uzaklığı hesaplanması gereken $M_1(x_1, y_1)$ ve $M_2\ (x_2, y_2)$ noktaları x – eksenine ve y – eksenine paralel olmayan bir doğruya ait olsun (şek.6). $M_1M_2M_3$ dik üçgenini inceleyelim. Onun katetlerinin uzunlukları sırasıyla $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$ ve $M_2M_3 = |y_2 - y_1|$ olduğunu yazabiliriz. O halde M_1 ve M_2 noktaları arasındaki uzaklık d aslında dik üçgenin M_1M_2 hipotenüsüdür. Buna göre,

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

2. *M_1 (-2, 3) ve M_2 (0, -2) noktaları arasıdaki uzaklığı belirtiniz.*

$$d = \sqrt{(0-(-2))^2 + ((-2)-3)^2} = \sqrt{29}. \blacklozenge$$

3. *A(3,-6), B(-2, 4) ve C (1, -2)* noktaları bir doğru üzerinde olup olmadığını yoklayınız.

AB, AC ve *BC* doğru parçalarının uzunluklarını hesaplayacağız. Bunlardan biri diğer ikisinin toplamına eşit olup olmadığını yoklayacağız.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \quad \overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$ olduğuna göre, bu üç nokta bir doğru üzerinde olduğunu buluyoruz.¨

4. Köşelerinin koordinatları *A(1, 1)*, *B(2,3)* ve $C\left(1, \frac{9}{4}\right)$. olan üçgen, hangi türden olduğunu belirtiniz.

Üçgenin $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ve $\overline{BC}$ kenar uzunluklarını hesaplayalım:

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \qquad \overline{AC} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}, \qquad \overline{BC} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

$\overline{AC} = \overline{BC} \neq \overline{AB}$ olduğuna göre, verilen üçgen ikizkenar olduğunu buluyoruz.¨

Alıştırmalar

1. Verilen noktalar arasındaki uzaklığı hesaplayınız:

a) $M_1(1,-3)$ ve $M_2(2,6)$; b) $M_1(0,2)$ ve $M_2(0,-2)$;

c) $M_1(-1,-2)$ ve $M_2(2,4)$; d) $M_1(1,3)$ ve $M_2(7,0)$.

2. A(1, -3), B(3, -5) ve C (-5, 7) noktaları bir üçgenin köşeleri olup olmadığını yoklayınız.

3. Apsisi 7 olan *B* noktası , *A*(-1, 5) noktasından 10 birim uzaklığındadır. *B* noktasının koordinatlarını belirtiniz.

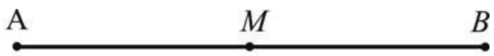
4. A(5, 8) ve B(-11, -2) noktaları veriliyor. *A* noktasına göre *B* noktasının simetriği olan *C* noktasının koordinatlarını belirtiniz.

5*. A(1, 4), B(3, -9) ve C (-5, 2) noktaları veriliyor. Bu noktalar bir üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz ve *B* köşesinden çizilen kenarortayının uzunluğunu belirtiniz.

5.3. Doğru Parçasının Verilen Oranda Bölünmesi

Bir doğru üzerinde olan *A, B* ve *M* $(A \neq B)$ noktaları için, $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ özelliği varsa, *M* noktası *AB* doğru parçasını *A*'dan başlayarak *B*'ye doğru λ oranında böler.

1. *M* notası *AB* doğru parçasının orta noktası ise $\overline{AM} = \overline{MB}$ olur, yani *M* noktası *AB* doğru parçasını *A*'dan *B*'ye doğru λ = 1 oranında böler (şek.7).



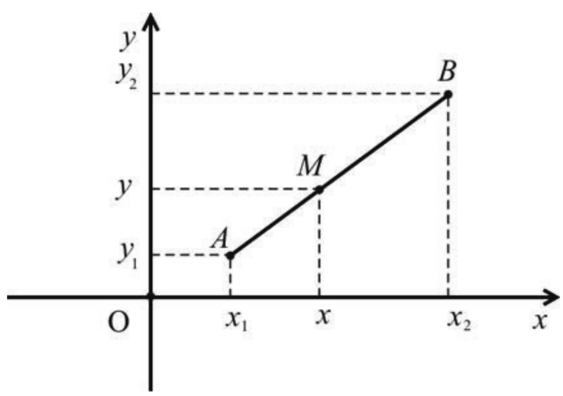
Şek. 7

Şek. 8

2. *P* ve *Q* noktaları *AB* doğru parçasını $\overline{AP} < \overline{AQ}$ olmak üzere, üç eşit parçaya ayırıyorlar. Bu durumda $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PB}$ ve $\overline{AQ} = 2\overline{QB}$ dir. O halde, *P* noktası *AB* doğru parçasını *A*'dan *B*'ye doğru $\frac{1}{2}$ oranında, *Q* noktası ise 2 oranında böler (şek. 8). ♦

İlerde "*M* noktası *AB* doğru parçasını *A*'dan *B*'ye doğru λ oranında böler" diyecek yerde, sadece "*M* noktası *AB* doğru parçasını λ oranında böler" diyeceğiz. Bu durumda *AB* şeklinde ifade edilen doğru parçasında *A* ilk ve *B* ikinci nokta olduğunu sayacağız.

M noktası ancak ve ancak *A* ve *B* arasında ise λ sayısı sıfırdan büyüktür. Özel durum λ = 1 ise *M* noktası *AB* doğru parçasının orta noktası ise, ancak ve ancak *M* noktası *A* noktasıyla çakışırsa λ = 0'dır, λ = -1 ise $\overline{AM} = -\overline{MB}$ gerekir, bu ise imkansızdır. Demek ki, λ ≠ -1 olmalıdır. λ sayısı sıfırdan küçük ve λ ≠ -1 ise, *M* noktası *AB* doğru parçasının dışında *AB* doğrusuna aittir.



Şek. 9

Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan *AB* doğru parçasını l oranında bölen *M* (*x, y*) noktasının koordinatlarını belirtelim (şek.9).

$\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ eşitliğinden $x - x_1 = \lambda\,(x_2 - x)$ ve $y - y_1 = \lambda\,(y_2 - y)$ gerekir. O halde

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$$

$\lambda = \dfrac{p}{q}$ olduğu durumda

$$\boxed{x = \frac{qx_1 + px_2}{p+q}} \qquad \boxed{y = \frac{qy_1 + py_2}{p+q}}$$

elde edilir.
Özel durumda, M noktası AB doğru parçasının orta noktası ise, $\lambda = 1$'dir ve

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

elde edilir. Bu formüller orta noktanın koordinatlarıdır.

3. Köşelerinin koordinatları *A(-2, -3)*, *B(6, 1)* ve *C(-4, 5)* olan üçgen verilmiş olsun. Üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Ağırlık merkezi AA_1, BB_1 ve CC_1 kenar ortaylarını $l = 2$ oranında böldüğünü biliyoruz. Bu özellikten yararlanarak ağırlık merkezinin koordinatlarını belirteceğiz.

$x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ ve $y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ den $A_1(2, -1)$ dir.

O halde, $x_T = \dfrac{x_A + 2x_{A_1}}{1+2} = \dfrac{-4+4}{3} = 0$ ve $y_T = \dfrac{y_A + 2y_{A_1}}{1+2} = \dfrac{5-2}{3} = 1$, olduğuna göre T(0, 1) olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. A(3,-7), B(5, 2) ve C(-1, 0) noktaları bir üçgenin köşeleridir. Kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

2. A(1, 1), B(5, 11) ve C(3, -1) noktaları bir üçgenin köşeleridir. A noktasından çizilen kenar ortayın uzunluğunu belirtiniz.

3. A(-3, -2) ve B(7, 3) noktaları veriliyor. AB doğru parçasını beş eşit parçaya bölen noktaların koordinatlarını belirtiniz.

4. A(3, 1) ve B(8, 3) noktaları veriliyor. *AB* doğru parçasını:
a) 2 : 3 ; b) 3 : 2; c) -2 : 3; d) -3 : 2
oranında bölen *M* noktasının koordinatlarını belirtiniz.

5. Kenarlarının orta noktaları $P(3,-2)$, $Q(1, 6)$ ve $R(-4, 2)$ olan bir üçgenin köşelerinin koordinatlarını belirtiniz.

6*. $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ ve $C(c_1, c_2)$ noktaları bir üçgenin köşeleridir. ABC üçgeninin ağırlık merkezi için $T\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$. formülü geçerli olduğunu ispatlayınız.

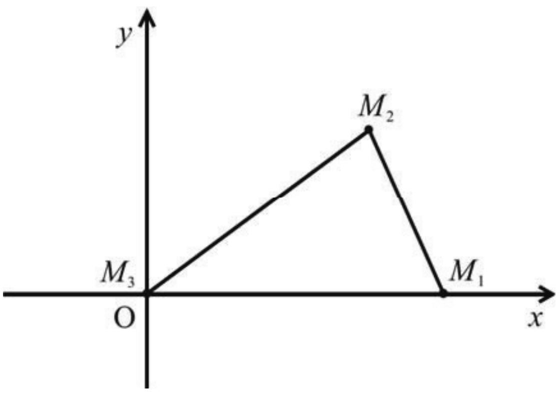
5.4. Üçgenin Alanı

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ve $M_3(x_3, y_3)$ noktaları verilen bir üçgenin köşeleri olsun. Problemi iki aşamadan çözeceğiz.

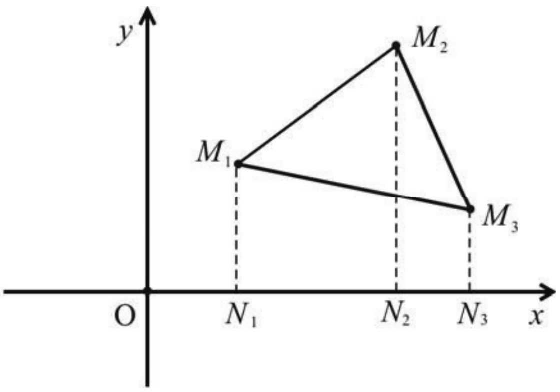
I. aşama. Önce, bir köşesi koordinat başlangıcında, diğeri ise x ekseninde olan üçgenin alanını belirtelim (şek.10). Bu durumda üçgenin üçüncü köşesi ya x ekseni üstünde ya da x ekseni altında olacaktır. Üçgenin alanı, tabanı ve yüksekliğinin çarpımının yarısına eşit olduğuna göre, verilen üçgenin alanı

$$P = \frac{|x_1 y_2|}{2}$$

olur. Üçgenin alanı pozitif büyüklük olduğuna göre, x_1 ve y_2 ise pozitif ya da negatif sayılar olabilir. Bu yüzden onların çarpımının mutlak değeri alınır.



Şek. 10



Şek. 11

II. aşama. *Genel olarak (şek.11) köşeleri* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ve $M_3(x_3, y_3)$ noktalarında olan üçgenin alanı $N_1M_1M_2N_2$ ve $N_2M_2M_3N_3$ yamukların alanlarının toplamından $N_1M_1M_3N_3$, yamuğun alanı çıkarılır. O halde

$$P = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) =$$
$$= \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)].$$

elde edilir. M_2 noktası, M_1 ve M_3 noktalarıyla belirlenen doğrunun altında ise, üçgenin alanı için negatif değer elde edilecektir. Üçgenin alanı pozitif sayı olduğuna göre, elde edilen değerin mutlak değeri alınmalıdır.

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}| y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) |= \\ &= \frac{1}{2}| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) | \end{aligned}}.$$

Üçgenin alanını hesaplamak için kullanılan bu formülden, üç noktanın bir doğru üzerinde (doğrusal) olması için şart elde edebiliriz. Üç nokta bir doğru üzerinde bulunduğu durumda, bu noktalarla elde edilen üçgenin alanı sıfırdır.

1. Köşelerinin koordinatları, A(1, 2), B(-2, 3) ve C(0, 5) olan üçgenin alanını hesaplayınız.

Üçgenin alanı formülünden yararlanacağız.

$$P = \frac{1}{2}| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) |=$$
$$= \frac{1}{2}| 1(3 - 5) - 2(5 - 1) + 0(2 - 3) |= 4$$

Demek ki, verilen üçgenin alanı 4 birim karedir.¨

Alıştırmalar

1. Köşelerinin koordinatları A(-3,2), B(3, 5) ve C(1,-3) olan üçgenin alanını hesaplayınız.

2. P_1(-3,-3), P_2(3,5) ve P_3(6,9) noktaları bir üçgenin köşeleri midir?

3. Koordinatları M(1, -3), B(3, 5) ve C(2, 1) olan M, B ve C noktaları bir doğru üzerinde olup olmadıklarını yoklayınız.

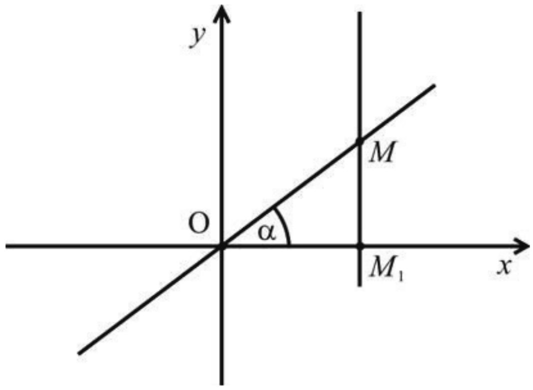
4. Köşeleri A(0,1), B(3,7), C(4,4) ve D(1,-2) olan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

5. Köşeleri A(1,4), B(5,3), C(-3,-5) ve D(-2,1) olan yamuğun alanını hesaplayınız.

6*. Köşelerinin koordinatları A(1,1), B(-1, -2) ve C(-4,7) olan üçgende *P* noktası *AC* kenarının orta noktası olduğuna göre, *APB* ve *BPC* üçgenlerinin alanını hesaplayınız.

5.5. Doğru Denkleminin Açık Şekli

Doğru,temel geometrik kavramı olduğuna göre tanımı yoktur. Bunun denklemini elde etmek için, onun bazı özelliklerinden yararlanacağız. Önce koordinat başlangıcından geçen ve koordinat eksenlerinden farklı olan doğrunun denklemini belirtelim (şek.12).



Şek. 12

$M(x, y)$ noktası, doğru üzerinde koordinat başlangıcından farklı olan herhangi bir nokta olsun. M noktasının x- eksenine dik izdüşümünü M_1 ile, doğrunun x- ekseninin pozitif yönüyle oluşturduğu açıyı α ile işaret edelim. Böyle durumda $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{y}{x} = tg\alpha$ oranı, M noktasının herhangi durumu için sabittir. Bu sabit sayı k ile işaret edilir ve buna **açı katsayısı** ya da **doğrunun eğimi** denir. Buna göre, bu doğrunun her noktasının koordinatları

$\boxed{y = kx}$.

denklemini sağlamaktadır.

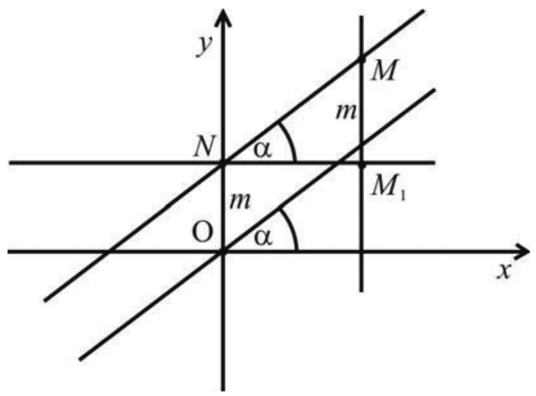
O halde, $y = kx$ denklemi, koordinat başlangıcından geçen ve x- ekseninin pozitif yönüyle a açısını oluşturan doğrunun denklemidir. Burada $k = tg$ a'dır.

1. Koordinat başlangıcından geçen ve – ekseninin pozitif yönüyle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ açısını oluşturan doğrunun denklemini yazınız.

Doğru, koordinat başlangıcından geçtiğine göre, denklemi y = kx şeklindedir. Ödevin koşuluna göre, $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{4} = 1$'dir. Demek ki, doğrunun denklemi $y = x$*'tir.*¨

Koordinat düzleminde herhangi bir doğru verilmiş olsun. Şu iki durum mümkündür:

- Doğru her iki ekseni keser (şek.13). *N(0, m)* noktası, doğrunun y- eksenini kestiği nokta olsun. Bu durumda, m pozitif ise, doğrunun her noktasının ordinatı, verilen doğruya paralel olan ve koordinat başlangıcından geçen doğrunun ordinatından m kadar fazladır ve m negatif olduğu durumda her noktanın ordinatı m kadar küçüktür. İncelenen her doğru x- ekseninin pozitif yönüyle aynı açıyı oluşturur. Buna göre onların açı katsayıları birbirine eşittir. Koordinat başlangıcından geçen doğru



Şek. 13

$$y = kx$$

denklemiyle verildiğine göre, verilen doğrunun denklemi $\boxed{y = kx + m}$,

olur. Burada k verilen doğrunun eğimidir, m ise y- ekseninden kestiği doğru parçasıdır. Elde edilen denkleme **doğrunun açık şekli** denir, doğruya ise **açık şekilde** verilmiştir denir.

2. *M(2,-3)* ve *N(5, 6)* noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

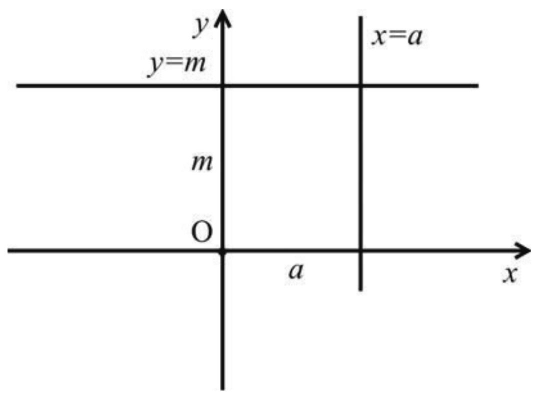
- Ödevin koşuluna göre *M(2,-3)* ve *N(5, 6)* noktaları doğruya ait noktalardır. O halde onların koordinatları $y = kx + m$ denklemini sağlar. Bu şekilde $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ sistemi elde edilir.

Bunun çözümü $k = 3$ ve $m = -9$ elde edilir. Demek ki doğrunun aranılan denklemi $y = 3x - 9$'dur.¨

Doğrunun açık şekilde verildiğinde, eğiminin ve y- ekseninden kestiği doğru parçasının önemini göz önünde bulundurarak şu sonuçlara varabiliriz:

a. İki doğru, ancak ve ancak paralel oldukları durumda eğimleri birbirine eşittir;

b. İki doğru ordinat ekseninden eşit doğru parçaları keser, ancak ve ancak her ikisi ordinat eksenini aynı noktada keserse.



Şek. 14

- Doğru x- ekseniyle paraleldir ya da çakışır (şek.14). Bu durumda doğruya ait her nokta x- ekseninden eşit uzaklıktadır. x- ekseninden uzaklık, aslında noktanın ordinatı olduğuna göre, doğruya ait her noktanın ordinatları birbirine eşittir. Bu uzaklığı m ile işaret edersek, verilen doğrunun denklemi

$$\boxed{y = m}$$

olur. Doğrunun bu durumu, önceki doğrunun bir özel durumu gibi kabul edebiliriz. Doğru x- ekseninin pozitif yönüyle $a = 2kp$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ açı yaptığına göre, bu durumda $k = 0$ olur. Bunun özel durumu, x- ekseninin denklemi $y = 0$ olur.

- Doğru y- ekseniyle paraleldir ya da y- ekseniyle çakışık durumdadır (şek.14). O halde doğruya ait her nokta y- ekseninden eşit uzaklıktadır. Bir noktanın y- eksenine uzaklığı, aslında onun apsisi olduğuna göre, doğruya ait her noktanın apsisleri birbirine eşittir. Bu uzaklığı a ile işaret edersek, verilen doğrunun denklemi

$$\boxed{x = a}$$

olur. Bunun özel durumu, y- ekseninin denklemi $x = 0$ olur.

3. Koordinat düzleminde, $x = 2$ ve $y = 3$ doğrularının durumu nasıldır?

$x = 2$ doğrusu, y- eksenine paraleldir ve onun her noktası y- eksenine 2 birim uzaklıktadır. $y = 3$ doğrusu, x – ekseniyle paraleldir ve her noktası x- ekseninden 3 birim uzaklıktadır.¨

Alıştırmalar

1. M(-1, 1), N(2, –3) ve P(2, 2) noktaları $y = -x + 4$ doğrusuna ait olup olmadıklarını yoklayınız.

2. Koordinat başlangıcından geçen ve x- ekseninin pozitif yönüyle

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; b) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; c) $\alpha = \pi$.

açı oluşturan doğrunun denklemini belirtiniz.

3. Denklemiyle verilmiş olan doğrunun eğimini ve y- ekseninden kestiği parçayı belirtiniz:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = -x + 3$; c) $y = -2$; d) $y = \sqrt{3}x$.

4. x- ekseninin pozitif yönüyle $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ açı yapan ve ordinat eksenini $-\dfrac{1}{2}$ de kesen doğrunun denklemini yazınız.

5. $A(-3, 2)$ noktasından geçen ve x- ekseninin pozitif yönüyle $\alpha = 135^0$ açı yapan doğrunun denklemini yazınız.

6. $A(2, -1)$ ve $B(-3, 5)$ noktalarından geçen doğrunun ordinat ekseninden kestiği parçayı ve x- ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açıyı belirtiniz.

7*. $M(2, -8)$ ve $N(-1, 7)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

5.6. Doğru Denkleminin Genel Şekli

Geçen derste, koordinat düzlemine ait bir doğrunun denklemi için *x* ve *y* değişkenli birinci derece denklem elde ettik. Bu derste, *x* ve *y* değişkenli birinci dereceden denklemin neyi ifade ettiğini inceleyeceğiz. Bu nedenle:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

denklemini inceleyelim. $A \neq 0$ ya da $B \neq 0$ olduğunu farz edelim. $A = B = 0$ olduğu durumda eşitlik $C = 0$ olur. *O* halde $C \neq 0$ durumunda koordinat düzleminde eşitliği sağlayan hiçbir nokta yoktur. Fakat $C = 0$ durumunda düzlem üzerinde her nokta eşitliği sağlar.

- $A = 0$ ise, $B \neq 0$ olur ve (1) denklemi $y = -\dfrac{C}{B}$ denklemiyle denk olur. Bu son eşitliği sağlayan noktaların geometrik yeri *x*- eksenine paralel olan ve $M\left(0, -\dfrac{C}{B}\right)$ noktasından geçen doğrudur.

- $B = 0$ ise, $A \neq 0$ olur ve (1) denklemi $x = -\dfrac{C}{A}$ denklemiyle denk olur. Bu son eşitliği sağlayan noktaların geometrik yeri *y*- eksenine paralel olan ve $N\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ noktasından geçen doğrudur.

- $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ ise, (1) denklemi $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ denklemiyle denk olur. Bu son eşitlik, eğimi $k = -\dfrac{A}{B}$ ve *y*- ekseninden $m = -\dfrac{C}{B}$ doğru parçasını kesen bir doğrunun açık şeklidir.

Buraya kadar yapılan incelemelerden şu sonuca varabiliriz:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

eşitliği bir doğrunun denklemidir ve ona **doğrunun genel şekli** denir.

1. $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ doğrusunun denklemini genel şekilde dönüştürünüz.

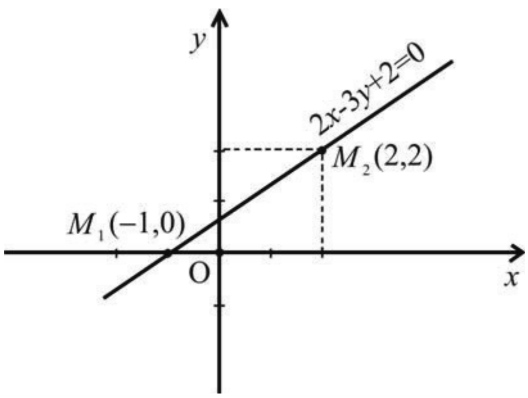
Verilen denklem, $\dfrac{1}{2}x + y - 3 = 0$, yani $x + 2y - 6 = 0$ denklemiyle denktir. ♦

2. $3x + 3y - 5 = 0$ doğrusunun denklemi veriliyor. Bu doğrunun *x*- ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açıyı ve *y*- ekseninden kestiği doğru parçayı belirtiniz.

Verilen denklemi y'ye göre çözersek verilene denk olan $y = -x + \frac{5}{3}$ denklemini elde edeceğiz. Bu denklem aslında düzlem üzerinde aynı doğrunun denklemidir . Oradan $k = tg\alpha = -1$ olduğuna göre $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ve $m = \frac{5}{3}$ elde edilir.¨

3. $2x - 3y + 2 = 0$ denklemiyle verilmiş olan doğruyu çiziniz.

Verilen ödevi çözmek için, doğruya ait olan iki noktayı belirtmek yeterlidir. Ondan sonra iki noktadan sadece bir tek doğru geçtiğine göre, aranılan doğruyu çizmiş oluyoruz (şek.15). x için tahminen iki değer seçtikten sonra, onlara karşılık gelen y değerlerini belirtiyoruz. Bu örnekte, $x_1 = 2$ seçimi uygundur, çünkü o değere karşılık y için tam sayılı değer, yani $y_1 = 2$ elde edilir. Benzer şekilde x için $x_2 = -1$ seçersek $y_2 = 0$ elde edilir. ¨



Şek. 15

Alıştırmalar

1. Verilen doğruların denklemlerini genel şekilde dönüştürünüz:

a) $y = 2x - 3$; b) $y = -4$; c) $x = 3$.

2. Verilen doğruların eğimini ve ordinat ekseninden kestiği parçayı belirtiniz:

a) $2x - y + 3 = 0$; b) $5x + 2y - 3 = 0$; c) $3x + 8y + 16 = 0$.

3. $x + y - 3 = 0$ doğrusu veriliyor. Bu doğrunun *x*- ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açıyı ve *y*- ekseninden kestiği doğru parçayı belirtiniz.

4. Denklemleriyle verilmiş olan doğruları çiziniz:

a) $y = 3x + 1$; b) $x = \sqrt{2}$; c) $y = \pi$;

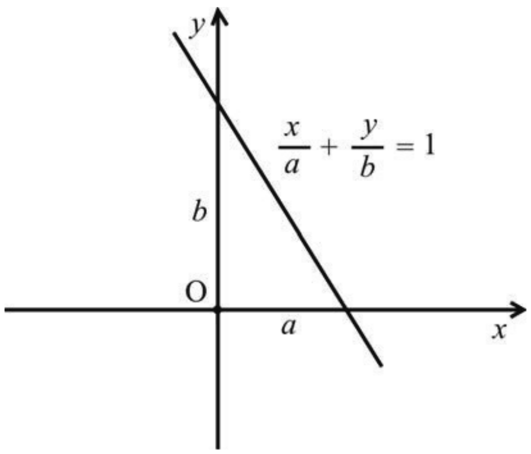
d) $y = 2x + 2$; e) $y = \frac{1}{3}x - 2$; f) $x = 0{,}5y - 1$.

5*. $\lambda \neq 0$ olmak üzere, $Ax + By + C = 0$ ve $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ denklemleri aynı doğrunun denklemi midir?

5.7. Doğrunun Eksen Parçalarına Göre Denklemi

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

denklemi, koordinat düzleminde bir doğrunun denklemi olduğunu gördük. Daha da, $C = 0$ ise, doğru koordinat başlangıcından geçer, $A = 0$ ise doğru x- eksenine paraleldir, $B = 0$ ise doğru y- eksenine paraleldir.



Şek. 16

Verilen doğru koordinat başlangıcından geçmediğini, ne de eksenlerden biriyle paralel olmadığını farz edeceğiz. Bu durumda denklemin katsayıları için $A \neq 0$, $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ geçerlidir. *(1)* denklemini $-\frac{1}{C}$ ile çarparsak

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

ya da

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

elde edilir. $a = -\frac{C}{A}$ ve $b = -\frac{C}{B}$ koyarsak, verilen denklem

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (2)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme **doğrunun eksen parçalarına göre denklemi** denir.

a ve *b* parametrelerin geometrik anlamını inceleyelim. (2) denkleminde önce $y = 0$, ondan sonra $x = 0$ koyarsak, sırasıyla x- eksenini ve y- eksenini kesen $P(a, 0)$ ve $Q(0, b)$ noktalarını elde edeceğiz. Buna göre a ve b sayıları mutlak değerce, doğrunun sırasıyla x ve y eksenlerinden kestiği doğru parçalarıdır. Bunlara **eksen parçaları** diyeceğiz.

1. $x - 3y - 6 = 0$ doğrunun denklemini, eksen parçalarına göre yazınız. Ondan sonra doğrunun eksenlerden kestiği parçaları belirtiniz.

Verilen denklem, doğrunun genel şeklidir. Bu denklemi $-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$ ile çarparsak $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ denklemi elde edilir, bu ise $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$ denklemine denktir. Bu son denklem doğrunun eksen parçaları cinsinden denklemidir ve verilen denkleme denktir. *x*- ekseninden kestiği parça 6 birim, y- ekseninden kestiği parça ise 2 birimdir. ♦

2. Koordinat eksenleri ve $2x - 5y - 10 = 0$ doğrusuyla sınırlanan üçgenin alanını hesaplayınız.

Koordinat eksenleri birbirine dik olduklarına göre, elde edilecek üçgen de diktir. Dik köşesi koordinat başlangıcında, katetleri koordinat eksenleri üzerinde, hipotenüsü ise verilen doğruya ait olacaktır. Dik üçgenin alanı, katetlerinin çarpımının yarısına eşit olduğunu biliyoruz. Bu katetler burada aslında doğrunun eksenlerden kestiği parçalardır. O halde, doğrunun denklemini eksen parçalarına göre düzenlersek verilene denk olan $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ denklem elde edilecektir. Demek ki, doğrunun eksenlerden kestiği parçalar 5 ve 2'dir. Buna göre, aranılan üçgenin katetleri 5 birim ve 2 birimdir. Demek ki, üçgenin alanı 5 birim karedir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen doğruların denklemlerini eksen parçalarına göre dönüştürünüz:
a) $3x - 2y + 12 = 0$; b) $y = -x + 1$; c) $y = 4x - 2$,

2. *k* parametresinin değerini o şekilde belirtiniz ki $2x + 5ky - 3 = 0$ doğrusunun eksenlerden ayırdığı parçaların uzunlukları toplamı 10 olsun.

3. *k* parametresinin değerini o şekilde belirtiniz ki $6x + 5y - 12k = 0$ doğrusunun eksenlerden ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımı $\frac{5}{6}$ olsun.

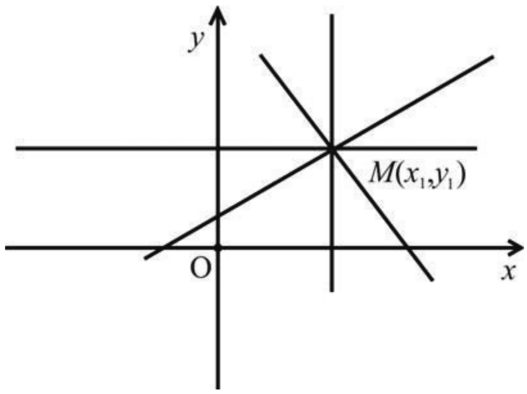
4. $x + 2y - 6 = 0$ doğrusuyla ve koordinat eksenleriyle sınırlanan üçgenin alanını hesaplayınız.

5.* $M(4, -3)$ noktasından öyle bir doğru çiziniz ki, koordinat eksenleriyle alanı 3 birim kare olan üçgen elde edilsin.

5.8. Nokta ve Doğru Arasındaki Durumlar

5.8.1 Verilen Noktadan Geçen Doğru Demetinin Denklemi

$1M(x_1, x_2)$ noktası koordinat düzleminde sabit bir nokta olsun. Verilen bu noktadan M merkezli doğru demeti diye adlandırılan sonsuz çok sayıda doğru geçer (şek.17). M noktasından geçen her doğrunun genel denklemi



Şek. 17

$$Ax + By + C = 0$$

biçimindedir. M noktası bu doğruya ait olduğuna göre, koordinatları doğrunun denklemini sağlar, yani

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Elde edilen denklemi birincisinden çıkarırsak:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$ elde edilir.

M noktasının koordinatları denklemi sağladığına göre, bu şekilde olan her denklem, M noktasından geçen doğrunun denklemidir. A ve B katsayılarına farklı değerler vermekle, M noktasından geçen farklı doğrular elde edilecektir.

Demete ait olan doğrular arasında bir tanesi y- eksenine paraleldir. Onun denklemi $x = x_1$ dir. Sadece bu doğrunun açı katsayısı ve ordinat eksenini kestiği parçası yoktur. O halde bu doğru açık şekilde ifade edilemez. M noktasından geçen diğer doğrulardan her biri

$$y = kx + n$$

açık şekilde ifade edilebilir. M noktası bu doğruya ait olduğuna göre, koordinatları doğrunun denklemini sağlar, yani

$$y_1 = kx_1 + n$$

geçerlidir. Elde edilen denklemi, ilkinden çıkarıyorsak,

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

denklemi elde edilecektir. Bu şekilde olan her denklem M noktasından geçer. k katsayısının farklı değerlerini değiştirmekle, y eksenine paralel olan doğru hariç olmak üzere, M noktasından geçen farklı doğruların denklemleri elde edilecektir.

1. $M(-3, 2)$ noktasından geçen ve x- ekseninin pozitif yönüyle $a = 135^0$ açı yapan doğrunun denklemini yazınız.

Merkezi M noktası olan doğru demetinin denklemi $y - 2 = k(x + 3)$'tür. Doğru demetine ait aranılan bu doğru x- ekseninin pozitif yönüyle $a = 135^0$ açı yaptığına göre, onun açı katsayısı $k = tg\ 135^0 = -1$'dir. O halde aranılan doğrunun denklemi $y - 2 = -1(x + 3)$, ya da $x + y + 1 = 0$ olur. ♦

5.8.2. İki Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi

Bir noktadan geçen doğru demetinin denkleminden yararlanarak, iki noktadan geçen doğrunun denklemini kolay belirtebiliriz.

1. $M_1(-12, 5)$ ve $M_2(8, -3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

M_1 noktasından geçen doğru demetinin denklemi $y - 5 = k(x + 12)$'dir. Aranılan doğru M_2 noktasından geçtiğine göre, koordinatları doğrunun denklemini sağlayacaktır, yani $-3 - 5 = k(8+12)$ geçerlidir. Oradan da $k = -\dfrac{2}{5}$ elde edilir. Buna göre, aranılan doğrunun denklemi $y - 5 = -\dfrac{2}{5}(x + 12)$, ya da $2x + 5y - 1 = 0$ olduğunu buluyoruz. ♦

İncelenen örnek, herhangi iki noktadan geçen doğrunun denklemini belirtmek için bir yol göstermektedir. $M_1(x_1, y_1)$ ve $M_2(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun (şek.18). Verilen noktalardan geçen M_1M_2 doğrusunun denklemini belirtelim.

- $x_1 = x_2$ ise, M_1M_2 doğrusu y- eksenine göre diktir ve denklemi

$\boxed{x = x_1}$ olur.

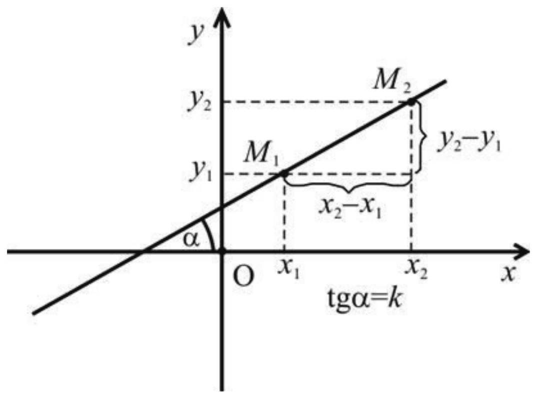
- $x_1 \neq x_2$ ise, M merkezli doğru demetinin denklemi

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

dir. M_1M_2 doğrusu M_2 noktasından geçtiğine göre, onun koordinatları denklemi sağlar ve

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

elde edilir. Buna göre M_1M_2 doğrusunun açı katsayısı (eğimi)



Şek. 18

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

olduğunu buluyoruz. k için elde edilen bu değeri, yukarıdaki doğru demetinin denkleminde değiştirirsek **iki noktadan geçen doğrunun denklemini** elde edeceğiz:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

İki noktadan geçen doğrunun denkleminden, **üç noktanın doğrusal olma koşulunu** bulabiliriz. $M_3\ (x_3, y_3)$ noktası M_1 ve M_2 noktalarından geçen doğruya ait olmak için, onun koordinatları verilen doğrunun denklemini sağlamalıdır, yani

$$\boxed{y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}$$

formülü elde edilir.

5.8.3. Verilen Bir Noktadan Verilen Doğruya Uzaklık

Şimdi, düzlem üzerinde verilen bir noktadan verilen bir doğruya uzaklığın nasıl hesaplandığını görelim. Bir noktadan verilen bir doğruya uzaklık, aslında o noktadan geçen ve verilen doğruya dik olan doğruyla kesişim noktasına kadar uzaklıktır, ya da diğer sözlerle noktasından verilen doğruya inilen dikmenin uzunluğu olarak tanımlanır.

Doğrunun denklemi

$Ax + By + C = 0$

genel şekilde verildiği durumda, denklemi $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ normlayan çarpanıyla çarpmamız gerekir. Bu çarpanın işareti C katsayısının işaretiyle terstir. O halde verilen noktadan verilen doğruya uzaklığı belirtmek için verilen doğrunun denklemi

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

biçiminde yazılır. Noktanın koordinatları değiştirilir ve elde edilen ifadenin mutlak değeri alınır. Sonuç olarak

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

elde edilir.

1. *A(2, 1)* ve *B(-2, 4)* noktalarından $4x - 3y + 15 = 0$ doğrusuna uzaklığı belirtiniz.Verilen noktadan verilen doğruya uzaklığı belirtmek için, doğrunun denklemini $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm 5}$ çarpanıyla çarpacağız. Bu çarpanın işareti, C katsayısının işaretiyle ters olduğuna göre $M=-\frac{1}{5}$ olur. O halde doğrunun denklemi $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$ elde edilir. Şimdi, verilen noktanın koordinatlarını değiştirmekle $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1-3\right|=|-4|=4.$ elde edilir. Mutlak değeri almadan önce d'nin işareti negatif olduğuna göre, A noktası ve koordinat başlangıcı doğrunun aynı tarafında bulunur.

Benzer şekilde *B* noktası için de $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot(-2)+\frac{3}{5}\cdot 4-3\right|=|1|=1.$ elde edilir. Bu durumda mutlak değeri almadan d'nin işareti pozitif olduğuna göre, nokta ve koordinat başlangıcı doğrunun ters taraflarında bulunur.

Alıştırmalar

1. Verilen noktadan geçen doğru demetini yazınız.
a) $M(2,-3)$; b) $M(-1,4)$.

2. $M(-2, 1)$ noktasından geçen ve eğimi $k = -3$ olan doğrunun denklemini yazınız.

3. $M(4, -7)$ noktasından geçen ve x – ekseninin pozitif yönüyle $a = 120^0$ açı yapan doğrunun denklemini yazınız.

4. Verilen noktalardan geçen doğrunun eğimini belirtiniz:
a) $M_1(-1, 4)$ ve $M_2(4, -3)$; b) $M_1(0, -2)$ ve $M_2(-1, 3)$; c) $M_1(1, 4)$ ve $M_2(-2, 4)$;

5. $M_1(-1, 4)$ ve $M_2(4, -3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

6. $M_1(0, 3)$, $M_2(2, 6)$ ve $M_3(-1, 4)$ noktaları aynı doğruya ait midir?

7. $A(-5, -1)$ noktasından $4x + 3y + 30 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı belirtiniz. Verilen nokta ve koordinat başlangıcı doğrunun aynı tarafında mıdır?

8. Koordinat başlangıcından $9x - 2y + 10 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı belirtiniz.

9*. $M(-3, 1)$ ve $N(5, 4)$ noktalarından hangisi $x - 2y - 5 = 0$ doğrusuna daha yakın olduğunu belirtiniz.

10*. $C(4, 3)$ noktasından $d = 5$ birim uzaklıkta olan ve koordinat eksenlerden eşit doğru parçaları kesen doğrunun denklemini belirtiniz.

5.9. İki Doğru Arasındaki Durumlar

5.9.1. İki Doğru Arasındaki Durumlar

Bir düzlem üzerinde iki doğru, ya bir noktada kesişir, ya paralel ya da çakışık durumda olabilirler. Genel şekilde kendi denklemleriyle iki doğru verilmiş olsun:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$A_2 x + B_2 y + C_2 = \mathbf{0}.$

Verilen denklemlerin katsayıları ve yukarıda sayılan üç durum hakkında inceleme yapacağız.

- Verilen

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

sisteminin bir tek çözümü varsa, verilen doğrular kesişir, yani onların bir tek ortak noktaları vardır.

(x_0, y_0) ikilisi verilen sistemin bir tek çözümü olsun. (1) sisteminin birinci denklemini B_2 ile, ikincisini ise $-B_1$ ile çarparak taraf tarafa toplarsak,

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x_0 + (C_1B_2 - C_2B_1) = 0 \qquad (2)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (1) sisteminin birinci denklemini A_2 ile, ikincisini ise $-A_1$ ile çarparak taraf tarafa toplarsak,

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y_0 + (A_1C_2 - A_2C_1) = 0 \qquad (3)$$

elde edilir.

(x_0, y_0) ikilisi verilen sistemin bir tek çözümü olması için, yani bir tek noktada kesişmeleri için yeter koşul $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$'dır, yani

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}},$$

sağlandığında (1) sisteminin bir tek çözümü vardır. yani doğrular bir noktada kesişir. Paydalardan biri sıfır ise, ona karşılık gelen pay da sıfır olmalıdır. Bu durumda verilen sistemin çözümü:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (4)$$

Elde edilen sayılar, verilen doğruların kesişim noktasının koordinatlarıdır. Gerçekten, x ve y için (4) ifadesinde elde edilen değerleri (1) sisteminde değiştirirsek, (1)'deki denklemler özdeşliklere dönüşecekler.

1. $2x - y - 5 = 0$ ve $x + 3y + 1 = 0$ kesişen doğrular olduğunu gösteriniz.

y bilinmeyenini yok ettikten sonra $7x - 14 = 0$ elde edilir. Oradan $x = 2$ olduğunu buluyoruz. Bunu birinci denklemde değiştirmekle $y = -1$ elde edilir. ♦

- $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ koşulu verilen doğruların kesişimi için yeter şart olduğunu göstermek için $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda verilen doğruların daha bir ortak (x_1, y_1) noktaları varsa *(2) ve (3)* denklemlerinden

$$C_1B_2 - C_2B_1 = 0 \text{ ve } A_1C_2 - A_2C_1 = 0.$$

elde edilir.

Son üç eşitlikten $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$ ve $C_2 = \lambda C_1$, olacak şekilde bir λ reel sayısı vardır sonucuna varılır. Gerçekten, A_1 ya da B_1 sayılarından biri sıfırdan farklı ise, $B_1 \neq 0$ olduğunu alabiliriz ve $\lambda = \frac{B_2}{B_1}$ koyarsak $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ eşitliğinden $A_2 = \lambda A_1$ gerekir, $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ denkleminden de $C_2 = \lambda C_1$ gerekir. Demek ki, $\lambda \neq 0$ reel sayısıyla çarpmakla birinci doğrunun denkleminden ikinci doğrunun denklemi elde edilir. Bu ise demektir ki, verilen doğrular çakışık durumdadır. O halde iki doğrunun çakışık olma koşulu şu şekilde ifade edilir:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}},$$

- $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ ve paylardan biri $C_1B_2 - C_2B_1$ ya da $A_1C_2 - A_2C_1$ sıfırdan farklı ise, (1) sisteminin çözümü yoktur. Demek ki doğrular birbiriyle paraleldir. Buna göre doğrular birbirine paralel olmak için gerek ve yeter koşul şu şekilde ifade edilebilir:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}.$$

2. $3x - 2y + 5 = 0$ ve $4y - 6x - 1 = 0$ doğruları birbirine paralel olduklarını gösteriniz.
$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{1}$, olduğuna göre, doğrular birbirine paraleldir. ♦

5.9.2. İki Doğru Arasındaki Açı. İki Doğrunun Dik Olma Şartı

Denklemleri açık şekilde verilmiş olan iki doğru verilmiş olsun:

$$y = k_1 x + m_1 \quad \text{ve} \quad y = k_2 x + m_2.$$

Doğruların ötelenmesinde kesiştikleri açı φ değişmediğine göre, verilen denklemlerle belirlenen doğrular arasındaki açı:

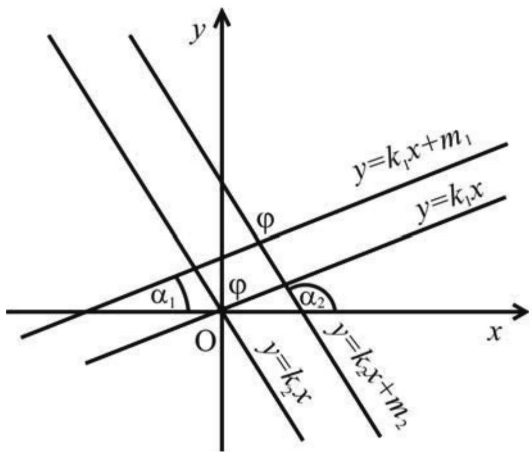
$y = k1\,x$ ve $y = k2\,x$

doğruları arasındaki açıya eşit olacaktır. O halde $\varphi = a2 - a1$'dir. Denklemin her iki tarafına tanjant fonksiyonu uygulanırsa

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$ elde edilir.

$tg\,a_1 = k_1$ ve $tg\,a_2 = k_2$ ile işaret edersek

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$



Şek. 19

elde edilir. Bu şekilde elde edilen açı, aslında birinci doğruyu kesişim noktası etrafında pozitif yönde ikinci doğruyla çakışıncaya kadar döndürmekle meydana gelen açıdır (şek.19).

İki doğrudan biri y- ekseniyle paralel ise, onlar arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \alpha$ olur. a, ikinci doğrunun x- ekseninin pozitif yönüyle oluşturduğu açıdır.

1. $y = 2x - 3$ ve $3x + y - 2 = 0$ doğruları arasındaki açıyı belirtiniz.

Birinci doğrunun eğimi $k_1 = 2$, ikincisinin ise $k_2 = -3$ tür.

O halde, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3-2}{1 + 2\cdot(-3)} = 1$, elde edilir. Oradan da $\varphi = \frac{\pi}{4}$ elde edilir. ♦

Doğrular birbirine dik olduğu durumda $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$, dir. O halde $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ elde edilir. Buna göre **iki doğrunun dik olma şartı**

$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$ dir.

İki doğrudan biri y- eksenine paralel ise, bunlar birbirine diktir, ancak ve ancak diğeri x- eksenine paralel ise.

2. $M\,(-1, 1)$ noktasından geçen ve $3x - y + 2 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini belirtiniz.

M noktasından geçen doğru demetinin denklemi $y + 1 = k\,(x - 1)$'dir. Bu demetten verilen doğruya, yani $y = 3x - 2$ doğrusuna dik olan doğruyu belirtmemiz gerekir. Dik olma şartına göre, $k = -\frac{1}{3}$ elde edilir. Buna göre, aranılan doğrunun denklemi $x + 3y + 2 = 0$ olduğunu buluyoruz. ♦

Doğrular, genel denklemleriyle

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{ve} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

verildiği durumda k_1 ve k_2 eğimlerini A_1, B_1, A_2 ve B_2 katsayılarıyla ifade ederken

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{ve} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

elde edilir. Oradan, iki doğru arasındaki açı için

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}} \qquad A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0 \text{ ve } \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \text{ ise } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

'dir.

Doğrular genel şekilde verildiği durumda, iki doğrunun dik olma şartı

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$ olur.

Alıştırmalar

1. Verilen doğrulardan hangileri kesişen, hangileri paralel, hangileri ise çakışık durumdadır. Doğrular kesiştikleri durumda, kesim noktasını bulunuz:

a) $3x - 2y + 1 = 0$ ve $2x + 5y - 12 = 0$;

b) $3x + y - 17 = 0$ ve $6x + 2y + 12 = 0$;

c) $2x - y + 3 = 0$ ve $6x - 3y + 9 = 0$;

2. Verilen doğrunun koordinat eksenleriyle kesişim noktalarını bulunuz.

a) $x + 10y - 5 = 0$ *b)* $2x - 3y + 12 = 0$;

3. $A(-2, 3)$ noktasından geçen ve $5x - 6y + 7 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini belirtiniz.

4. $2x - y + 7 = 0$ ve $3x + y + 10 = 0$ doğruları arasındaki açıyı hesaplayınız.

5. $A(-2, 8)$ noktasından geçen ve $y = 3 - 5$ doğrusuyla $\varphi = \frac{\pi}{4}$ asçısını oluşturan doğrunun denklemini belirtiniz.

6*. $A(3, 15)$ noktasından geçen ve $3x - 5y + 8 = 0$ doğrusuyla $\varphi = \frac{\pi}{4}$ asçısını oluşturan doğrunun denklemini belirtiniz.

5.10. Konu Pekiştirme Alıştırmaları

1. Köşelerinin koordinatları *A (-5,5), B (7,-3)* ve *C (3,1)* olan ABC üçgenin çevresini hesaplayınız.

2. *AB* doğru parçasını λ oranında bölen *M* noktasının koordinatlarını belirtiniz:
a) $A(10,3),\ B(-2,-5)$ ve $\lambda = \frac{1}{3}$; *b)* $A(-2,-5),\ B(13,5)$ ve $\lambda = \frac{3}{2}$

3. *A(1, 1), B(-1, 3)* ve *C(2, 0)* noktaları bir doğru üzerinde bulunuyorlar. *A* noktası *CB* doğru parçasını λ oranında bölerse, λ belirtilsin.

4. Köşelerinin koordinatları *A(0,0), B(3,-2)* ve *C(1,5)* olan *ABC* üçgenin alanını hesaplayınız.

5. $M_1(-7,2)$ ve $M_2(3,-5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi.

6. *A(1,9), B(-2-,3)* ve *C(-5,-3)* noktaları bir doğru üzerinde olduklarını ispatlayınız.

7. *A(-2,-1), B(1,2)* ve *C(-1,4)* noktaları veriliyor. *ABCD* bir paralelkenar olacak şekilde *D* noktasının koordinatlarını belirtiniz.

8. *M (2,3)* noktasından d doğrusuna uzaklığı belirtiniz:
a) $3x + 4y - 25 = 0$; b) $12x - 5y + 4 = 0$.

9. Köşelerinin koordinatları *A(3,2), B(5,4)* ve *C (1,4)* olan *ABC* üçgenin kenarortaylarının denklemlerini yazınız.

10. *ABC* üçgeni veriliyor:
a) A(-8,1), B(1,2) ve *C(-5,-3)* olduğuna göre, *T* ağırlık merkezini belirtiniz;
b) A(-4,8), B(1,-7) ve *C (7,5)* olduğuna göre, *H* otosantarını (yüksekliklerin kesişim noktasını) belirtiniz;

11. *M* noktası $x - y + 5 = 0$ doğrusuna göre *N (3,2)* noktasının simetriğidir. *M* noktasının koordinatlarını belirtiniz.

12*. Bir karenin iki kenarı $5x - 12y - 65 = 0$ ve $5x - 12y + 26 = 0$ doğruları üzerindedir. Karenin alanını hesaplayınız.

13*. *M(-3,8)* noktasından geçen ve koordinat eksenleriyle alanı $P = 6$ birim olan üçgeni oluşturan doğrunun denklemi yazılsın.

14*. Köşelerinin koordinatları *A(-2,1), B(3,4) ve C(1,-2)* olan *ABC* üçgenin yüksekliklerinin eğimini belirtiniz.

Konu Özetleri

Dik açılı koordinat sistemi, birbirine göre dik olan ve **koordinat eksenleri** diye adlandırılan iki eksenden oluşur. İki eksenin kesiştiği noktaya **koordinat başlangıcı** ya da **orijin** denir ve O ile işaret edilir. Yatay eksene x- ekseni ya da **apsis ekseni**, dikey eksene ise y- ekseni ya da **ordinat ekseni** denir. Koordinat sisteminin ait olduğu düzleme **koordinat düzlemi** denir.

P noktasının durumu reel sayılardan oluşan bir (x,y) sıralı çiftiyle tamamen bellidir. Bu sıralı çifte P noktasının **koordinatları** denir. Bu durumda x sayısına **birinci koordinat** ya da **apsis**, y sayısına ise **ikinci koordinat** ya da **ordinat** denir.

Koordinat eksenleri, düzlemi **dördüller** denilen dört kısma ayırıyorlar. **I dördül** olarak üst sağ kısım, **II dördül** üst sol kısım, **III dördül** alt sol kısım ve **IV dördül** alt sağ kısım olarak alınır.

Koordinat düzlemine ait M_1 ve M_2 noktaları arasındaki uzaklık d, şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ olan AB doğru parçasını λ oranında bölen $M(x, y)$ noktasının koordinatları şu formüllerle hesaplanır:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}$$

$\lambda = \dfrac{p}{q}$ olduğu durumda

$$\boxed{x = \frac{qx_1 + px_2}{p+q}} \qquad \boxed{y = \frac{qy_1 + py_2}{p+q}}$$

formülleri kullanılabilir.

Özel durumda, M noktası AB doğru parçasının orta noktası ise, $\lambda = 1$'dir ve

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}} \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

elde edilir. Bu formüller orta noktanın koordinatlarıdır.

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ve $M_3(x_3, y_3)$ noktaları verilen bir üçgenin köşeleri ise, alanı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\,|\,y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\,| = \\ &= \frac{1}{2}\,|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|\,.\end{aligned}}$$

Üçgenin alanını hesaplamak için kullanılan bu formül, üç noktanın bir doğru üzerinde (doğrusal) olması için şart elde edebiliriz. Üç nokta bir doğru üzerinde bulunduğu durumda, bu noktalarla elde edilen üçgenin alanı sıfırdır.

Doğrunun denklemi ve çeşitleri

- doğrunun açık şekli

$$\boxed{y = kx + m}$$

Burada k verilen doğrunun eğimidir, m ise y- ekseninden kestiği doğru parçasıdır.

- **doğrunun genel şekli**

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

- **doğrunun eksen parçalarına göre denklemi**

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Burada a ve b sayıları mutlak değerce, doğrunun sırasıyla x ve y eksenlerinden kestiği doğru parçalarıdır *(***eksen parçalarıdır***)*.

- $M_1(x_1, y_1)$ noktasından geçen **doğru demetinin denklemi:**

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

- $M_1(x_1, y_1)$ ve $M_2(x_2, y_2)$ gibi **iki noktalarından geçen doğrunun denklemi**:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ve $M_3(x_3, y_3)$ gibi üç noktanın doğrusal olma koşulu:

$$\boxed{y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}$$

Verilen $M_1(x_1, y_1)$ noktasından verilen $Ax + By + C = 0$ doğrusuna **uzaklık** şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ ve $Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$ denklemleriyle verilmiş olan iki doğru:

- kesişir, ancak ve ancak

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$$

ve bu durumda kesişim noktasının koordinatları şu formüllerle verilmiştir:

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y_0 = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

- çakışıktırlar, ancak ve ancak

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}},$$

- Paraleldirler, ancak ve ancak

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}.$$

$y = k_1 x + m_1$ *ve* $y = k_2 x + m_2$ doğruları arasındaki φ **açı** şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

İki doğrunun **dik olma koşulu**:

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$$

$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$ ve $Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$ denklemleriyle verilmiş olan iki doğru arasındaki φ **açı** şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}}$$

Bu durumda iki doğrunun **dik olma koşulu:**

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$ olur.

6 DİZİLER

6.1. Dizi Kavramı

Günlük hayatta, dizi biçiminde sıralamalara çok rastlıyoruz, örnek benzer veya farklı nesnelerin dizisi. Halbuki, matematikte dizilerin özel anlamı vardır.

Sonlu ve sonsuz diziler vardır. Sonlu dizilerde, belli bir düzene göre sıralanmış sonlu sayıda nesneler ve bu durumda, hangisi birinci, hangisi ikinci vb. olduğunu tam olarak belli olan gizilerdir. Bir kümenin beş elemanı olduğunu farz edelim. Birinci elemanı a_1, ikinci elemanı a_2, üçüncüsünü a_3, dördüncüsünü a_4 ve beşincisini a_5 ile işaret edeceğiz. Bu şekilde dizi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 şeklinde yazılır, ya da daha kısa a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 biçiminde yazılabilir.

Şunu da kaydedelim, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 elemanları, herhangi bir kümenin elemanları olabilir. Matematikte, bu elemanlar daha fazla durumlarda sayılardır (doğal, tam, rasyonel ya da reel), fakat sayı olması mecburi değildir.

Örnek, her söz, bir harfler dizisi sayılabilir. Bu durumda a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 elemanları, bir alfabeye aittir. 5 sayısı, incelenen sonlu dizinin **uzunluğudur** ve uzunluk daima aynı değildir. Örnek "ekonomi" sözcüğünü alalım. Bunu yedi elemanlı sonlu bir dizi olarak sayabiliriz. Uzunluğu 7'dir. Her sonlu dizi, doğal sayılar kümesinden {1, 2, 3, ….} incelenen kümeye bir eşleme olarak algılayabiliriz. Örneğin "ekonomi" sözcüğünü bir eşleme olarak alıyorsak

$1 \to$ e, $2 \to$ k, $3 \to$ o, $4 \to$ n, $5 \to$ o, $6 \to$ m, $7 \to$ i, $8 \to$ j, $9 \to$ a.
şeklinde yazabiliriz.

Buna göre şu sonuca varabiliriz: **Her sonlu dizi a_1, a_2, a_3, a_4,…., a_n, doğal sayılar {1, 2, 3, …, n}'den incelenen diziye bir eşlemedir ve bu durumda *i* $(1 \le i \le n)$ elemanına karşılık gelen eleman *i* indisiyle işaret edilir**, a_i, b_i, x_i …gibi. Daha da a_1, a_2, a_3, a_4,…., a_n sonlu bir dizi, kısa olarak (a_i) biçiminde işaret edilir.

Birçok durumlarda sonsuz dizilerle de işimiz olabilir. Onları a_1, a_2, a_3, a_4,…. ile ya da daha kısa (a_i) biçiminde işaret ediyoruz. a_i elemanı *i*. yerde olan elemandır $i \in \{1, 2, 3, ...\}$. Bunlar genellikle bazı sayılar olduğundan ilerde reel sayılar olduğunu sayacağız.

Tanım 1. Dizi, doğal sayılar kümesinden, reel sayılar kümesine bir eşlemedir.

Demek ki, dizi denilince sosuz diziyi kastedeceğiz, aksi halde sonlu dizi söz konusu olunca, sonlu dizi diye ifade edeceğiz.

1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ….. dizisini inceleyelim. Bu durumda eşleme
$f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$, $f(5) = 9$, $f(6) = 11$, ...
biçiminde tanımlanmıştır, bunu daha kısa olarak
$f(n) = 2n - 1$, ya da $a_n = 2n - 1$ şeklinde yazabiliriz. ♦

2. $a_n = n + \frac{1}{n}$ dizisinin ilk birkaç terimi: $a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$, $a_3 = 3 + \frac{1}{3} = 3{,}333...$, $a_4 = 4 + \frac{1}{4} = 4{,}25$, $a_5 = 5 + \frac{1}{5} = 5{,}2$, vb. ♦

3. $a_n = n_2 + n + 1$ dizisinin ilk birkaç terimi: $a_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$, $a_2 = 2^2 + 2 + 1 = 7$, $a_3 = 3^2 + 3 + 1 = 13$, $a4 = 4^2 + 4 + 1 = 21$, $a_5 = 5^2 + 5 + 1 = 31$, vb. ♦

4. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ dizisinin ilk birkaç terimi: $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, dir. ♦

5. $a_n = 8$ dizisinin birkaç terimi 8, 8, 8, 8,8, 8,….dir. Demek ki, n indisine bağlı olmadan a_n teriminin değeri 8'dir. a_n teriminin değeri daima sabit olan bu gibi dizilere **sabit diziler** denir. ♦

6. Genel terimi $a_n = 3 + (-1)n$ dizisini inceleyelim. n için 1, 2 ,3, … değerler vermekle 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4,… dizisi elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Dizi nedir? Sonlu ve sonsuz dizi için birer örnek yazınız.

2. (a_n) dizisinin ilk 5 terimini yazınız:

a) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$, b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, c) $a_n = 2^n$, ç) $a_n = (-1)^n n$.

3. (a_n) dizisinin n.ci terimini belirtiniz.

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ için $n = 4$, b) $a_n = n^n$ için $n = 3$, c) $a_n = 3^n$ için $n = 4$.

4. Genel terimi $a_n = (-1)^n n$ olan dizinin, n'in hangi değeri için değeri 2010'dur?

5. n'in hangi değeri için, genel terimi $a_n = 4n - 5$ dizisinin terimi 999 olur?

6. Genel terimi verilmiş olan dizinin dördüncü terimini belirtiniz:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, b) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, c) $a_n = (-2)^n$, d) $a_n = 3$.

7*. İlk beş terimi verilmiş olan dizilerin, genel terimini ifade edecek formül belirtiniz:
a) 3, 5, 7, 9, 11,... b) 1, 4, 9, 16, 25,... c) 1, 3, 1, 3, 1,...

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ e) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

6.2. Artan ve Eksilen Diziler

Dizilerin bazı özellikleri vardır. Bu özellikler genellikle dizilerin artma ve eksilme koşullarıdır.

Tanım 1. (a_n) dizisi için:
- her k doğal sayısı için,
$$a_{k+1} > a_k, \qquad (1)$$
özelliği varsa, dizi kesin anlamda artandır (ya da kesin anlamda monoton artandır);
- her k doğal sayısı için,
$$a_{k+1} < a_k, \qquad (2)$$
özelliği varsa, dizi kesin anlamda eksilendir (ya da kesin anlamda monoton eksilendir);
- her k doğal sayısı için,
$$a_{k+1} \leq a_k, \qquad (3)$$
özelliği varsa, artandır (ya da eksilmeyendir);
- her k doğal sayısı için,
$$a_{k+1} \geq a_k\,. \qquad (4)$$
özelliği varsa, dizi eksilendir (ya da artmayandır);

Bir dizinin kesin anlamda artan olması için koşul (1) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden büyük olmalıdır.

1. Genel terimi $a_n = 3n - 2$ ile verilmiş olan diziyi inceleyelim. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots$, yani, $1 < 4 < 7 < 10 < \ldots$ olduğuna göre, bu dizi kesin anlamda artandır. Bunu doğrudan doğruya gösterelim:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - [3n - 2] = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 > 0,$$

demek ki, her doğal sayı n için $a_n+1 > a_n$ geçerlidir. ♦

Bir dizinin kesin anlamda eksilen olması için koşul (2) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden küçük olduğunu ifade etmektedir.

2. Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n}$ olan diziyi inceleyelim. $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots.$, yani $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{5} > \ldots..$ olduğuna göre dizi kesin anlamda eksilendir. Bunu doğrudan doğruya gösterelim:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

demek ki, her doğal sayı n için $a_{n+1} < a_n$ geçerlidir. ♦

Bir dizinin artan ya da eksilmeyen olması için koşul (3) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden büyük ya da eşit olduğunu, yani kendinden önceki terimden küçük olmadığını ifade etmektedir.

3. Şu diziyi inceleyelim: 1,1,2,2,3,3,4,4,….. Bu dizinin terimleri için $1 \leq 1 \leq 2 \leq 2 \leq 3 \leq 3 \leq 4\ldots$ geçerli olduğuna göre, dizi eksilmeyendir. Dizi kesin anlamda artan değildir, çünkü ikinci terimi birincisinden büyük değildir, o halde daha fazla inceleme için gerek yoktur. ♦

Bir dizinin eksilen ya da artmayan olması için koşul (4) gereğince, dizinin her terimi, kendinden önce gelen terimden küçük ya da eşit olduğunu yani kendinden önceki terimden büyük olmadığını ifade etmektedir.

4. $1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ dizisini inceleyelim. $1 \geq 1 \geq \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{1}{4} \geq \ldots$ olduğuna göre, dizi eksilendir ya da artmayandır, çünkü ikinci terimi birincisinden küçük değildir, o halde daha fazla inceleme için gerek yoktur. ♦

Şunu da ifade etmeliyiz ki, her dizi (1), (2), (3) ve (4) özelliklerinden birini sağlaması mecburi değildir. Örnek, böyle bir dizi 1,2,1,2,1,2,1,2, ….. dir. Halbuki bazı dizilerde, bu özelliklerden hiçbiri sağlanmadığına rağmen, belli bir k_0 dan sonra dizinin terimleri (1), (2), (3) ve (4) özelliklerinden birini sağlayabilir. Böyle durumda, dizi kesin anlamda artan, eksilen, artmayan ya de eksilmeyen olduğunu daha geniş anlamda anlaşmaya göre ifade edebiliriz.

5. 3, 2, 1, $1\dfrac{1}{2}$, $1\dfrac{2}{3}, 1\dfrac{3}{4}, 1\dfrac{4}{5}, 1\dfrac{5}{6}, \ldots$ dizisini inceleyelim. Bu dizi tanım 1 gereğince artan değildir, çünkü 3>2 doğru değildir. Bu dizi daha geniş anlamda artandır diyebiliriz. Çünkü üçüncü terimden başlayarak dizi artandır $1\dfrac{1}{2} < 1\dfrac{2}{3} < 1\dfrac{3}{4} < 1\dfrac{4}{5} < 1\dfrac{5}{6} < \ldots.$ Bu anlaşma gereklidir, çünkü bize daha çok, n indisinin büyük değerleri için dizinin nasıl olduğu ilgilendirir.

6. 1, 2, 1, 2, 1, $1\dfrac{1}{2}$, $1\dfrac{1}{3}, 1\dfrac{1}{4}, 1\dfrac{1}{5}, 1\dfrac{1}{6}, \ldots$ dizisini inceleyelim. Bu dizi tanım 1 gereğince eksilen değildir, fakat geniş anlamda eksilen olduğunu sayabiliriz, çünkü altıncı terimden başlayarak dizi eksilendir, $1\frac{1}{2} > 1\frac{1}{3} > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{5} > 1\frac{1}{6} > \ldots$ ♦

Alıştırmalar

1. Hangi diziler kesin anlamda artan, eksilen, artmayan, eksilmeyendir?

2. Kesin anlamda artan, eksilen, artmayan, eksilmeyen diziler için örnekler yazınız.

3. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ dizisi artan yoksa eksilen midir?

4. Şu dizilerden hangisi kesin anlamda artan, hangisi ise eksilendir:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, b) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$, c) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + (-1)^{n+1}}$, d) $a_n = 2^n - 5$, e) $a_n = \dfrac{5^n}{n}$,

5. a) Bir dizi aynı zamanda hem artan, hem de eksilen olabilir mi?
   b) Sabit dizi, artan yoksa eksilen midir?

6. a pozitif sayısının hangi değeri için $a_n = a^n$ dizisi:
a) artan; b) eksilen; c) sabittir?

6.3. Aritmetik Diziler

Bu başlıkta, iki özel diziden bahsedeceğiz: Aritmetik diziler ve geometrik diziler.

Doğal sayılardan oluşan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … diziyi inceleyelim. Bu dizide 2 – 1 = 3 – 2 = 4 – 3 = ….ya da genel olarak iki ardışık terimin farkı daima eşittir. Bu özellikten yararlanarak şu tanımı kabul edeceğiz.

Tanım 1. Bir (a_n) dizisinde iki ardışık terimin farkı $a_{n+1} - a_n$ daima sabit kalıyorsa, yani n doğal sayısına bağlı değilse, ya da $a_{n+1} - a_n = d$ olacak şekilde bir d reel sayısı varsa (a_n) dizisine aritmetik dizisi denir. d sayısına ortak fark denir.

Aritmetik dizilerinden daha birkaç örnek inceleyelim.

1. -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14 ,… dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime 3 katmakla elde edilir, yani - 4 + 3 = -1, -1 + 3 = 2, 2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11,... . Bu durumda d = 3'tür. ♦

2. 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, … dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime -2 katmakla elde edilir, yani 5 - 2 = 3, 3 - 2 = 1, 1 - 2 = -1, -1 - 2 = -3, - 3 - 2 = -5,.. Bu durumda d = -2'dir. ♦

3. 6, 6, 6, 6, 6, 6 …. dizisi aritmetik dizidir. Çünkü her terim kendinden önceki terime 0 katmakla elde edilir. Bu durumda d = 0'dır. Aslında her sabit dizi aritmetik dizidir. □

Şunu fark edebiliriz, bir aritmetik dizisinin ilk terimi ve ortak farkı verildiğinde, dizinin tüm terimlerini bulabiliriz. Bunu aşağıdaki şekilde yapacağız:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

$a_6 = a_5 + d = a_1 + 4d + d = a_1 + 5d$

....

Bu yöntemi devam ederek a_k. terimi için

$$a_k = a_1 + (k - 1)d. \qquad (1)$$

elde edilir. Bu aslında dizinin genel terimi için istenilen formüldür. Gerçekten k = 1 için $a_1 = a_1$ dir, a_{k+1} için yine aynısı elde edilir:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd.$$

Buna göre şu sonuca varılır: Her doğal sayı k için şu formül geçerlidir:

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)d.}$$

4. Bir ayakkabı fabrikasında ilk yıl 50 000 çift ayakkabı üretilmiş ve her gelen yılda 3000 çift ayakkabı için üretim artmıştır. Fabrika kuruluşundan sekizinci yıl sonunda kaç çift ayakkabı üretmiştir?

a_k ile, fabrikanın kuruluşundan k'cı yılın üretimini işaret edelim. Yıllara göre üretim miktarları bir aritmetik dizisini oluşturdukları açıktır. Dizinin ilk terimi a_1 = 50 000 ve ortak fark d = 3 000'dir. k = 8 için (1) formülünden yararlanarak $a_8 = a_1 + (8 - 1)d = 50000 + 7 \bullet 3000 = 71000$ elde edilir.

Demek ki, fabrikanın kuruluşundan sekizinci yılında 71 000 çift ayakkabı üretilmiştir. ♦

5. Bir aritmetik dizisinin ilk terimi 8, 15. terimi ise 50'dir. Ortak fark d ne kadardır?

(1) denklemini d'ye göre çözersek:

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1}.$$

elde edilir. Verilen değerleri formülde yerine koyarsak

$$d = \frac{a_k - a_1}{k-1} = \frac{50-8}{15-1} = \frac{42}{14} = 3.$$

elde edilir. ♦

6. Bir aritmetik dizisinin ilk terimi – 3, ortak farkı $d = -2$'dir. Dizinin hangi terimi - 19 olduğunu bulunuz.

(1) denklemini k'ya göre çözersek:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1.$$

elde edilir. Verilen değerleri formülde yerine koyarsak

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{-19-(-3)}{-2} + 1 = \frac{-19+3}{-2} + 1 = \frac{-16}{-2} + 1 = 9.$$

elde edilir. Demek ki, dizinin dokuzuncu terimi – 19 olur. k için çözüm, ancak doğal sayı olduğu durumda kabul edilebilir. ♦

Alıştırmalar

1. 150'ci tek sayı hangi sayıdır?

2. 75. çift sayıyı hesaplayınız.

3. Ortak farkı 2,3 ve 85. terimi 270,8 olan aritmetik dizisinin ilk terimi belirtilsin.

4. Verilen dizilerden hangileri aritmetik dizisidir:

a) 2, 8, 14, 20, 26, ...,$6n$-4,... b) 1, 8, 27, 81, n^3,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - $5n$,... d) 1, 2, 4, 8, 16, ...,2_{n-1},...?

5. Bir iş örgütünün 1 Ocak 2000 yılında borcu 50 000 EUR olmakla, her gelen yılda borç 3500 EUR azalmıştır. Kaç yıl sonra borç 22000 EUR kalmıştır?

6*. Bir aritmetik dizisinin beşinci terimi 12, on ikinci terimi ise 33'tür. Aritmetik dizisinin ilk terimi ve ortak farkı ne kadardır?

7. -3, 1, 5, 9, 13, 17,… aritmetik dizisinde çift indisli yerlerdeki sayıları silersek, nasıl dizi elde edilecektir?

8*. Banka hesabında bir miktar parası olan Yusuf, her ay aynı miktar para hesabına yatırıyor. Tasarruf yapmaya başladıktan 16 ay sonra, Yusuf'un 81 500 denarı, 27 ay sonra ise 81500 denarı olmuştur. Tasarrufa başlamadan önce Yusuf'un banka hesabında kaç parası varmış ve her ay banka hesabına ne kadar para yatırmıştır?

6.4. Aritmetik Dizilerin Özellikleri

A. Şu örneği inceleyelim.
1. 1, 4, 7, 10, 13, 16 sonlu aritmetik dizisi için:
1 +16 = 4 +13 = 7 +10 = 10 + 7 = 13 + 4 = 16 +1 geçerlidir. ♦

Genel olarak, $a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \cdot$ sonlu aritmetik dizisi verilmiş olsun:
Şu çiftleri inceleyelim:

$(a_1; a_n)$, $(a_2; a_{n-1})$, $(a_3; a_{n-2})$, . . . ,$(a_m; a_{n-m+1})$, . . ., $(a_n; a_1)$,

burada indislerin toplamı n + 1'dir (1 + n = n +1, 2 + (n -1) = n +1, 3 + (n - 2) = n +1m + (n - m +1) = n +1 ,...). Bu çiftlere a_1 ve a_n **uç terimlerden eşit uzaklıkta olan terimler** denir. $a_m = a_1 + (m-1)d$ ve $a_{n-m+1} = a_1 + (n-m)d$: olduğuna göre, onların toplamı

$$a_m + a_{n-m+1} = a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-m)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n .$$

Bu toplam, m sayısına bağlı olmadığını görüyoruz. Yani,
m = 1,2,3, …. için, $a_m + a_{n-(m-1)} = a_1 + a_n$, dir.
Bununla şu özelliği ispatlamış oluyoruz:

> **1^0.** Her aritmetik dizisinde, uç terimler a_1 ve a_n 'den eşit uzaklıkta olan terimlerin toplamı uç terimlerin $a_1 +\ a_n$ toplamına eşittir.

2. 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, … aritmetik dizisini inceleyelim. n = 5 için (1^0) özelliği
5 +13 = 7 +11 = 9 + 9 = 11 + 7 = 13 + 5 (= 18), n = 6 için ise bu özellik

5 +15 = 7 +13 = 9 +11 = 11 + 9 = 13 + 7 = 15 + 5 (= 20). ♦

3. Örnek 2'deki diziyi inceleyelim. Dizinin ikinci terimi (7), ilk (5) ve üçüncü (9) terimin aritmetik ortası olduğunu; Üçüncü terimi (9), ikinci terim (7) ve dördüncü terim (11) aritmetik ortası olduğunu fark edebilirsiniz.

Bu özellik genel olarak da geçerlidir.

2⁰. Her aritmetik dizisinde a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin aritmetik ortasıdır, yani $1< m$ için $a_m = \dfrac{a_{m-1} + a_{m+1}}{2}$. dir.

B. Çok kez, ilk terimi a_1 ve ortak farkı d ile verilmiş olan bir aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamını belirtmek gerekir. Aranılan toplamı S_n ile işaret edeceğiz.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n .$$

Bu toplamı ters yönde yazarsak

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 .$$

geçerli olduğunu fark edebiliriz Bu iki denklemi taraf tarafa toplamakla: $2S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$ ·elde edilir. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$ olduğuna göre, $2S_n = n(a_1 + a_n)$, elde edilir. Oradan da

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}. \qquad (1)$$

elde edilir. Bu formülde $a_n = a_1 + (n - 1)d$ değiştirmekle

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}. \qquad (2)$$

formülü elde edilir. Bu formül, bir aritmetik dizisinin aranılan ilk n teriminin toplamıdır. Formül a_1, d, n ve S_n büyüklükleri arasındaki bağıntıyı göstermektedir ve bu büyüklüklerden herhangi biri bilinmediğinde diğer üç bilinen büyüklükle belirtilebilir.

1. İlk n tek sayının toplamını hesaplayınız.

(2) formülünde $a_1 = 1$ ve $d = 2$ ile değiştiriyoruz:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2 + 2(n-1)) = \frac{n}{2}(2n) = n^2 . \blacklozenge$$

2. Bir ayakkabı fabrikasında ilk yıl 50 000 çift ayakkabı üretilmiş ve her gelen yılda 3000 çift ayakkabı için üretim artmıştır. Fabrika kuruluşundan sekizinci yıl sonuna kadar toplam kaç çift ayakkabı üretmiştir?

(2) formülünde $n = 8$, $a_1 = 50\,000$ ve $d = 3\,000$ ile değiştiriyoruz:

$S_8 = \frac{8}{2}[2 \cdot 50000 + 7 \cdot 3000] = 4 \cdot 121000 = 484000$.

Demek ki, ilk sekiz yılda toplam 484 000 çift ayakkabı üretilmiştir.

Alıştırmalar

1. Verilen sayıların aritmetik ortalamasını belirtiniz: a) 15 ve 23; b) $x + y$ ve $x - y$.

2. Herhangi bir aritmetik dizisi verilmiş olsun. Değeri $\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}$ ye eşit olan bir terimin var olduğunu gösteriniz.

3. Herhangi bir aritmetik dizisini seçiniz ve

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}, \quad (k < m),$$

geçerli olduğunu gösteriniz. Bu ise, a_m terimi a_{m-k} ve a_{m+k} terimlerinin aritmetik ortalamasıdır demektir. Ondan sonra bu özelliği genel durum için ispatlamaya çalışınız.

4. İlk n çift sayının toplamını hesaplayınız.

5. Bir aritmetik dizisinin 78 teriminin toplamı ne kadardır:
a) $a_1 = 5$ ve $d = 3$; b) $a_1 = -2$ ve $d = 2$?

6. İlk n doğal sayının toplamı 1275'tir. n ne kadardır?

7*. $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$ geçerli olan bir aritmetik dizisi için ne diyebilirsiniz?

6.5. Geometrik Diziler

Aritmetik dizilerde iki ardışık terimin farkı daima aynı sayı olduğunu gördük. Bu ders biriminde, iki ardışık terimin bölümü daima sabit olan dizilerden söz edilecektir. Bu diziler geometrik dizilerdir. Tasarruf yatırımlarda, faizin hesaplanması için bu dizilerden yararlanılır.

Tanım 1. $q \neq 0$ olmak üzere,

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 \qquad (1)$$

biçiminden (a_n) dizisine **geometrik dizi** denir.

Görüldüğü gibi, dizinin her gelen terimi, kendinden önce olan terimin $q \neq 0$ sayısıyla çarpılarak elde edilir. a elemanı dizinin ilk terimidir, q sayısına ise ortak bölen ya da ortak çarpandır denir, çünkü

$$q = \frac{aq}{a} = \frac{aq^2}{aq} = \frac{aq^3}{aq^2} = \ldots$$ dir.

1. 3, 6, 12, 24, 48, 96, … dizisi, ilk terimi 3 ve ortak böleni 2 olan bir geometrik dizidir $2\ (= \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \ldots)$. ♦

2. İlk terimi 2 ve ortak çarpanı - 3 olan geometrik dizisini oluşturunuz.
Aranılan dizi : 2, 2• (-3), 2• $(-3)^2$, 2• $(-3)^3$,..., ya da 2, -6, 18, -54, … ♦

3. İlk terimi 18 ortak böleni $\frac{1}{3}$ olan dizi: 18, 8, $\frac{18}{3} = 6$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$,...♦

q > 1 ise, geometrik dizi $a_1 > 0$ için artandır, $a_1 < 0$ için ise eksilendir.

4. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … dizisinde $a_1 = 1 > 0$ ve q = 2 olduğuna göre dizi artandır. ♦

5. -1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, … dizisinde $a_1 = -1 > 0$ ve q = 2 > 1 olduğuna göre dizi eksilendir. ♦

q = 1 ise, dizi sabittir, örnek: -5, -5, -5, -5, -5, ….. .

0 < q < 1 olduğu durumda, geometrik dizi $a_1 > 0$ için eksilendir, $a_1 < 0$ için ise artandır.

6. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$ dizisinde $a_1 = 1 > 0$ ve $q = \frac{1}{2} < 1$ olduğuna göre dizi eksilendir. ♦

7. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \ldots$ dizisinde $a_1 = -1 < 0$ ve $q = \frac{1}{2} < 1$ olduğuna göre dizi artandır. ♦

$q < 0$ ise, dizinin terimlerinin işareti değişken olduğundan dizi ne artan ne de eksilendir. Bunu, örnek 2'de görebilirsiniz.

(1) formülünden şunları yazabiliriz:

$a_2 = a_1 q$,

$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$,

$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$,

$a_5 = a_4 q = a_1 q^4$,

...

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad (2)$$

Dizinin ilk terimi ve ortak çarpanı bilindiğinde, (2) formülünden yararlanarak dizinin herhangi terimini belirtebiliriz.

8. a_1 = - 162 ve $q = -\frac{1}{3}$ olan bir geometrik dizisinin altıncı terimi (2) formülü gereğince:

$$a_6 = (-162)\cdot(-\frac{1}{3})^5 = \frac{2\cdot 3^4}{3^5} = \frac{2}{3}. \blacklozenge$$

9. Bir geometrik dizisinin dördüncü terimi 162, altıncı terimi ise 1458'dir. Dizinin ilk terimini ve ortak bölenini belirtiniz.

(2) formülünden $n = 4$ ve $n = 6$ için

$162 = a_1 q^3$ ve $1458 = a_1 q^5$ denklemleri elde edilir.

İkinci denklemi birinci denklemle bölmekle, $9 = q^2$ ve oradan $q = \pm 3$ elde edilir. $q = 3$ için birinci denklemden $a_1 = \frac{162}{3^3} = 6$ elde edilir. $q = -3$ için, birinci denklemden $a_1 = \frac{162}{(-3)^3} = -6$ elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Bir geometrik dizisinin ilk iki terimi 41 ve 24'tür. Dizinin beşinci terimini belirtiniz.

2. Verilen dizilerden hangileri geometrik dizilerdir:

a) 2, - 8,32, -128,512.....2 • $(-4)^{n-1}$,... b) 1,8,27,81,..., n3,...

c) 9,4, -1, - 6, -11,...,14 - 5n,... d) 1,2,4,8,16.....2^{n-1},...?

Geometrik dizisi olanların ilk terimini ve ortak bölenini belirtiniz.

3. a) İlk terimi 5 ve ortak böleni 1,5 olan geometrik dizinin beşinci terimini bulunuz.
b) İlk terimi 1,5 ve ortak böleni -2 olan geometrik dizinin yedinci terimini bulunuz.

4. Duygu, yıllık %6 faiz oranıyla bankaya bir miktar para yatırmıştır.
a) Yedi yıl sonra yatırdığı para yüzde kaç artacaktır?
b) Kaç yıl sonra banka hesabındaki para ana paranın en az iki katına çıkacaktır?

5. Ali ve Bekir bir bankaya aynı miktar para yatırmışlar. Ali , % 3 faiz oranıyla 4 yıl için, Bekir ise %4 faiz oranıyla 3 yıl için yatırmıştır. Hangisi bankadan daha çok para almıştır?

6. Sütte bakteri sayısı her 3 saatte iki katına artar. 24 saatte bakteri sayısı kaç defa artacaktır?

6.6.Geometrik Dizisinin Özellikleri

A. 1. $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, 128 sonlu geometrik dizisini inceleyelim.

$\frac{1}{2}\cdot 128 = 2\cdot 32 = 8\cdot 8 = 32\cdot 2 = 128\cdot\frac{1}{2}$ olduğunu fark ediyoruz. ♦

Bu özellik, genel durumda da geçerli olduğunu göstereceğiz. $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ sonlu geometrik dizisi verilmiş olsun. $a_2 = a_1 q$ ve $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$a_2 a_{n-1} = a_1 q\cdot\frac{a_n}{q} = a_1 a_n$ elde edilir. Ondan sonra $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$ ve $a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{q} = \frac{a_n}{q^2}$ olduğundan $a_3 a_{n-2} = a_1 q^2\cdot\frac{a_n}{q^2} = a_1 a_n$ elde edilir.

Bu şekilde devam etmekle $a_k = a_1 q^{k-1}$ ve $a_{n-(k-1)} = \frac{a_n}{q^{k-1}}$, buradan da

$$a_k a_{n-(k-1)} = a_1 q^{k-1}\cdot\frac{a_n}{q^{k-1}} = a_1 a_n. \qquad (1)$$

Endekslerin toplamı n + 1 olan (a_2; a_{n-1}), (a_3 ; a_{n-2}), (a_4; a_{n-3}), (a_k ; a_{n-k+1}), (a_{n-1}; a_2) çiftlere, a_1 ve a_n **uç terimlerden eşit uzaklıkta olan terimler** denir. Buna göre (1) eşitliği şu özelliği ifade etmektedir:

1^0. Her geometrik dizide, a_1 ve a_n uç terimlerden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı, uç terimlerin çarpımına eşittir.

2. Şu geometrik dizisini inceleyelim: 2, 6, 18, 54, 162, 486, … $n = 5$ ve $n = 6$ için bu özelliği yoklayalım:

$n = 5$ için, $2{\bullet}162 = 6{\bullet}54 = 18{\bullet}18 = 54{\bullet}6 = 16{\bullet}22$ (= 324),

$n = 6$ için, 2-486 = 6-162 = 18-54 = 54-18 = 162-6 = 486-2 (= 972). ◆

3. Örnek 2'deki diziyi inceleyelim. İkinci terim (6), birinci (2) ve üçüncü (18) terimlerinin geometrik ortası; üçüncü terim (18), ikinci terim (6) ve dördüncü terim (54) sayılarının geometrik ortası; dördüncü terim (54), üçüncü terim (18) ve beşinci terim (162)'nin geometrik ortası olduğunu vb. fark edebiliriz. ◆

Genel olarak, $a_m = \dfrac{a_{m-1}}{q}$ ve $a_m = a_{m-1}q$ olduğuna göre

$(a_m)^2 = a_{m-1}a_{m+1}$, $\quad a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$.

Buna göre şu özellik geçerlidir:

2^0. Her geometrik dizisinde $1 < m$ için, $a_m = \sqrt{a_{m-1}a_{m+1}}$ dir, yani a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin geometrik ortasıdır.

Benzer şekilde, 2^0 özelliğinin daha genelini ifade eden şu özelliği de ispatlayabiliriz.

3^0. Her geometrik dizisinde $k < m$ için, $a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}$, dir, yani a_m terimi a_{m-k} ve a_{m+k} terimlerinin geometrik ortasıdır.

4. 3 ve 192 sayıları arasında verilenlerle beraber geometrik dizisi oluşturacak 5 sayı yerleştiriniz.

Önce, $a_1 = 3$ ve $a_7 = a_1q^6$ den q ortak bölenini belirtiyoruz. $a_1 = 3$ değerini değiştirmekle $3 \cdot q^6 = 192$ eşitliğinden $q^6 = 64$ ve $q = \pm 2$ elde edilir. $q = 2$ ise, şu dizi elde edilir:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, …, $q = -2$ ise 3, - 6, 12, -24, 48, -96, 192. ♦

B. Verilen geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamını S_n ile işaret edelim.

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}. \qquad (1)$$

Bu denklemin her iki tarafını q ile çarpmakla

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \qquad (2)$$

(2) eşitliğinden (1) eşitliği çıkarılırsa:

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1,$$

oradan

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}. \qquad (3)$$

elde edilir. Bu ise, bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamını ifade eden formüldür. Formülde a_1, q, n ve S_n büyüklükleri bulunur ve bu büyüklüklerden her biri, bilinen diğer üç büyüklükle hesaplanabilir. (3) formülü, genellikle $q >$ için uygulanır, $q < 1$ olduğu durumda aynı formül şu şekilde yazılarak kullanılır:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (4)$$

$q = 1$ ise, bu formüller kullanılamaz, çünkü kesrin hem payı, hem de paydası sıfır olur. Halbuki bu durumda $S_n = na_1$ olduğu açıktır.

1. İlk terimi $a_1 = 3$ ve $q = 2$ verilmiş olan geometrik dizisinin ilk 6 teriminin toplamını belirtiniz.

$n = 6$, $a_1 = 3$ ve $q = 2$ değerlerini formülde değiştirmekle

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (64 - 1) = 3 \cdot 63 = 189. \blacklozenge$$

elde edilir.

2. İlk terimi $a_1 = 4$ ve $q = -3$ verilmiş olan geometrik dizisinin ilk 7 teriminin toplamını belirtiniz.

$n = 6$, $a_1 = 4$ ve $q = -3$ değerlerini formülde değiştirmekle

$$S_7 = \frac{4((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = \frac{4(-2187 - 1)}{-4} = 2187 + 1 = 2188. \blacklozenge$$

3. Ortak çarpanı $q = -1$ olan geometrik dizisinin ilk $2k$ teriminin toplamını belirtiniz. $n = 2k$ ve $q = --1$ değerlerini formülde değiştirmekle

$$S_{2k} = \frac{a_1((-1)^{2k} - 1)}{-1-1} = \frac{a_1(1-1)}{-2} = 0.$$

elde edilir. Böyle bir sonun elde edilmesi doğaldır, çünkü bu dizi $a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots$ biçimindedir. ♦

Alıştırmalar

1. Verilen geometrik dizisinin ilk 8 teriminin toplamını belirtiniz:

a) -1,3, - 9,... b) 5, 5, 5,..., c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots,$ d) 512, -256, 128,...

2. Verilenlere göre geometrik dizisinin ilk terimini belirtiniz:

a) $n = 8$, $q = 2$, $S_6 = 765$, b) $n = 4$, $q = \frac{2}{3}$, $S_6 = 65$.

3. Bir geometrik dizisinin beşinci terimi $\frac{1}{9}$ ve ortak çarpanı $-\frac{1}{3}$'dir. İlk terimini ve ilk beş teriminin toplamını belirtiniz. Geometrik dizisini yazınız.

4. Ahmet ocak ayında 20 000 denar maaş almıştır. Yıl sonuna kadar maaşı her ay %3 artmıştır. Ahmet yıl boyunca toplam ne kadar maaş almıştır?

5. a) 30 ve 120; b) xy ve $\frac{x}{y}$ sayılarının geometrik ortasını belirtiniz.

6. Herhangi bir geometrik dizisini seçiniz ve 1, 2 ve 3 özelliklerini yoklayınız.

7*. Herhangi bir geometrik dizisi verilmiş olsun. Verilen dizide değeri $\sqrt{a_1 a_{2n+1}}$ olan teriminin var olduğunu ispatlayınız.

6.7. Konu Pekiştirme Ödevleri

1. Ne artan ne de eksilen olan bir diziyi yazınız.

2. 1, 4, 16, 25, 36, …, n^2 , … dizisinde 125 sayısına karşılık gelecek n indisli terim var mıdır?

3. (a_n) dizisini tek indisli terimleri pozitif, çift indisli terimleri ise negatif tir. Bu dizi artan ya da eksilen olabilir mi?

4. İlk 1000 doğal sayının toplamını hesaplayınız.

5. İlk terimi 7 ve yüzüncü terimi 53 olan aritmetik dizisinin ilk 100 teriminin toplamını hesaplayınız.

6. $a_2 = 6$ ve $a_{45} = 74$ olan aritmetik dizisinin ilk 46 teriminin toplamını hesaplayınız.

7. 1 ve 14 sayıları arasında *a, b, c* olmak üzere öyle üç sayı yerleştiriniz ki, 2, *a, b, c,*14 bir aritmetik dizisi olsun.

8. Herhangi bir aritmetik dizisi için $a_n = a_k + (n-k)d$ geçerli olduğunu gösteriniz.

9. Bir tüccar satranç tablosunu şu koşullara göre satıyormuş: Tablonun birinci karesinde 1 denar, ikinci karesinde 2 denar, üçüncüsünde 3 denar vb. olmak üzere son kareye 64 denar konulacaktır. Tüccar satranç tablosunu kaç denara satıyormuş?

10. İlk terimi 100 ve ortak böleni $q = -1$ olan bir geometrik dizisinin $2k + 1$ teriminin toplamını belirtiniz.

11. 3, b, 75 sayıları bir geometrik dizisi olacak şekilde b sayısını belirtiniz.

12. Her geometrik dizide $a_n = a_k q^{n-k}$ geçerli olduğunu ispatlayınız.

13. Her bakteri bir saatte ikiye katlanırsa, başlangıçta 7 bakteri olan bir bitkide 8 saat sonra ne kadar bakteri olacaktır?

14. Bir çocuk ocak ayında kumbarasına 5 denar koyarak para biriktirmeye başlamıştır. Ondan sonra her ay bir önceki ayın iki katı kadar kumbarasına para koymuştur. Yıl sonunda çocuğun kumbarasında ne kadar para birikmiştir?

15*. a) a_1, a_2, a_3 dizisi, aynı anda hem aritmetik, hem de geometrik dizisi ise $a_1 = a_2 = a_3$ olduğunu ispatlayınız.

b) $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ dizisi aynı anda hem aritmetik, hem de geometrik dizisi ise $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ olduğunu ispatlayınız.

16*. Bir geometrik dizisinde $a_2 a_3 = a_1 a_7$ özelliği varsa, dizi için ne diyebilirsiniz?

Konu Özetleri

Dizi, N doğal sayılar kümesinden, R reel sayılar kümesine bir eşlemedir.

- $a_{k+1} > a_k$ ise, dizi her doğal sayı için kesin anlamda **artandır**;
- $a_{k+1} < a_k$ ise, dizi her doğal sayı için kesin anlamda **eksilendir**;
- $a_{k+1} \leq a_k$ ise, dizi her doğal sayı için **artmayandır**;
- $a_{k+1} \geq a_k$ ise, dizi her doğal sayı için **eksilmeyendir**;
- Her doğal sayı n için $a_n \leq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa dizi **üstten sınırlıdır** denir.
- Her doğal sayı n için $a_n \geq M$ olacak şekilde M reel sayısı varsa dizi **alttan sınırlıdır** denir.
- Hem üstten hem de alttan sınırlı olan dizilere **sınırlı diziler** denir.

Her eksilen ve her artmayan dizi üstten sınırlıdır; her artan ve her eksilmeyen dizi alttan sınırlıdır.

Bir (a_n) dizisinde iki ardışık terimin farkı $a_{n+1} - a_n$ daima sabit kalıyorsa, yani n doğal sayısına bağlı değilse, ya da $a_{n+1} - a_n = d$ olacak şekilde bir d reel sayısı varsa (a_n) dizisine **aritmetik dizisi** denir. d sayısına **ortak fark** denir.

Bir aritmetik dizisinin genel terimi:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}.$$

Her aritmetik dizisinde a_m terimi a_{m-1} ve a_{m+1} terimlerinin aritmetik ortasıdır, yani $1 < m$ için $\boxed{a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}}$. dir.

Bir aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

ya da

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}.$$

$q \neq 0$ olmak üzere $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots$ ku $q \neq 0$, biçiminden (a_n) dizisine **geometrik dizi** denir. Bu dizinin genel terimi

$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$. dir.

Her geometrik dizide, a_1 ve a_n uç terimlerden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı, aq_n uç terimlerin çarpımına eşittir.

Her geometrik dizisinde $k < m$ için, $a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}$ 'dir, yani a_m terimi a_{m-k} ve a_{m+k} terimlerinin geometrik ortasıdır.

$\boxed{a_m = \sqrt{a_{m-k}a_{m+k}}}$.

Bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$\boxed{S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}}$, dir.

7. BİLEŞİK FAİZ HESABI

7.1. Bileşik Faiz Kavramı ve Hesaplanması

Bir miktar paranın faizinin hesaplanması basit ve bileşik faiz hesaplamasıyla yapılabilir. **Basit faiz**, bir yatırımın, yatırım vadesi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranıdır.

Bileşik faizde, yatırılan miktar para her dönemde değişir, yani her dönem sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle yatırım miktarı büyür ve gelecek dönemde aynısı anapara oluyor. Buna göre **bileşik faiz** için şu tanımı kabul edebiliriz: Bir yatırımın yatırım vadesi boyunca kazandığı faizin de yeni yatırım vadesinde yatırıma tabi tutulması sonucu elde edilen getiriyi gösteren faizdir. Diğer bir deyişle **faizin de faiz kazanmasıdır.**

Basit faiz $i = \frac{Kpt}{100}$ formülüyle hesaplanır (t yıl sayısıdır). Zaman aylar ile verildiğinde $i = \frac{Kpm}{1200}$ formülüyle hesaplanır. Bu durumda m ay sayısıdır ve zaman günlerle ifade edilirse $i = \frac{Kpd}{36500}$ formülü kullanılır (d – gün sayısı).

1. 24 000 denar temel kapital için 2 ayda %6 faiz oranıyla ne kadar faiz ödenecektir?
Verilenlere göre $K = 24\ 000$, $t = 2$ ay, $p = \%6$'dır.
$i = \frac{Kpt}{1200} = \frac{240000 \cdot 6 \cdot 2}{1200} = 2400$ denar.

Basit ve bileşik faiz hesaplama yoluyla elde edilen faiz miktarlarının farkını görmek için, bir örnekle karşılaştırma yapacağız. Ondan sonra, bileşik faizin hesaplanması için bir formül belirteceğiz.

2. 34 500 denar kapital bir bankaya %8 faiz ile dört yıl yatırılmış olan para basit ve bileşik faiz ile ne kadar faiz getirir?

Bir yılda 34 500 denar anapara basit faiz formülü ile

$\frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ denar faiz getirir.

Faiz daima anaparaya hesaplandığına göre bu miktar hep aynıdır ve dört yılda 2760 denarın dört katı kadar faiz elde edilir. Buna göre toplam faiz miktarı:

$i = \frac{8}{100} \cdot 34500 \cdot 4 = 11040$ denardır.

Bileşik faiz hesabında ise her yıl sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle anapara miktarı büyür ve gelecek yıl aynısı anapara oluyor. Buna göre, birinci yılın faiz miktarı $i_1 = \frac{8}{100} \cdot 34500 = 2760$ denardır. Halbuki artık ikinci yıl anaparası, birinci yılın anaparası ve birinci yılın faiz miktarıyla toplamına eşittir, 34 500 + 2 760 = 37 260 denardır.

İkinci yıl faiz miktarı $i_2 = \frac{8}{100} \cdot 37260 = 2980,8$ denar olur.

Üçüncü faiz miktarını hesaplamak için, anapara yine büyür ve 37260 + 2980,8 = 40240,8 denar olur. O halde $i_3 = \frac{8}{100} \cdot 40240,8 = 3219,264$ denar olur. Sonunda faizi hesaplanacak anapara 40240,8 + 3219,264 = 43460,064 olur. Buna göre $i_4 = \frac{8}{100} \cdot 43460,064 = 3476,8$ elde edilir. Dört yıl için elde edilen faiz miktarı 12436,86 denardır. Görüldüğü gibi, bileşik faiz hesabıyla hesaplanan faiz miktarı, basit faiz hesabıyla elde edilen miktardan büyüktür. ♦

Bileşik faiz,yılda bir defa, iki defa ya da birçok defa hesaplanabilir. Faizin hesaplandığı zaman aralığına **faiz hesaplama vadesi** denir. Faiz yılda bir hesaplanarak yıl sonunda elde edilen faiz anaparaya eklenirse, o halde yıllık faiz söz konusu olur. Faiz yılda iki defa hesaplanarak ana paraya eklenirse, faiz hesaplama vadesi 6 aydır ve yarım yıllık faiz hesaplaması söz konusu olur. Benzer şekilde faiz hesaplama yılda dört defa yapılırsa faiz hesaplama vadesi 3 aydır denir.

Basit faiz hesaplamasında dört temel büyüklük:

- K - anapara (temel kapital başlangıç miktar)
- i - faiz miktarı
- p – faiz oranı (yüzde olarak), 100 denar paranın zaman biriminde getirdiği faiz.
- t - paranın faizde kaldığı süre – yıl olarak, ya da daha küçük zaman ölçü biriminde de olabilir.

Bu büyüklükler, bileşik faiz hesabının da temel unsurlarıdır, halbuki burada ek olarak bileşik faizin temel unsuru:

- bir yıl esnasında faizin hesaplanma sayısı *m*, yani yıllık dönem sayısı da katılmaktadır.

Pratikte, faiz dönemleriyle ilgili olarak faiz hesapları çeşitli işaretlerle işaretleniyorlar. Örneğin, faizin yıllık hesaplanması (*a*) ile, yarım yıllık hesaplanması (sömestreli) (*s*) ile , üç ayda bir hesaplamayı (kvartal) (*q*) ile, ayda bir vadeyi (*m*) ile ve adı geçen her vadelik hesaplamalarda faiz oranı yıl bazında sayılmaktadır.

Faiz oranı, yıllık faiz oranı gibi verildiğinde *p.a.* biçiminde işaret yazılır, yarım yıllık faiz oranı olarak alınırsa *p.s.* işareti yazılır. Üç aylık bazında da faiz oranı verilebilir ve bu durumda *p.q.* biçiminde ya da aylık bazında olursa *p.m.* işareti yazılır. Bu şekilde verilmiş olan faiz oranına **nominal faiz oranı** denir. Nominal faiz oranı, aslında baz kabul edilen faiz vadesinde yüz para biriminin büyüme miktarıdır.

Ancak finansman ya da yatırımlarla ilgili kararlarda vade uzunluğu yıl olduğu kadar yıldan daha kısa süreli olabilir. Örneğin tahvil faizlerinin her altı ayda bir ya da üç ayda bir ödenmesi; ya da aylık, üç aylık, altı aylık vadeli hesap açtırılmasında olduğu gibi. Bu gibi durumlarda yıllık olarak verilen faiz oranından **etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı)** bulunarak işlem yapılmalıdır. Etkin faiz oranını, yıllık nominal faiz oranının (cari faiz ya da piyasa faiz oranı da denilen) yıl içindeki dönem sayısına bölünmesiyle bulunur.

Etkin faiz oranı, nominal faiz oranının bir kısmı gibi belirtilir. Örnek, nominal yıllık faiz oranı yıl bazında verilmiş iken altı ay vadeli bir hesap açtırılırsa, altı ay yılın yarısı olduğunu göz önünde bulundurarak etkin faiz oranı da nominal faiz oranının yarısı olacaktır. Nominal faiz oranı yıl bazında, faiz hesaplama vadesi aylık ise, etkin faiz oranı, nominal faiz oranının on ikide biri olacaktır. Benzer şekilde, nominal faiz oranı sömestreli (yarım yıllık) olduğunda, üç aylık faiz vadesi için etkin faiz oranı nominal faiz oranının yarısına eşittir, çünkü üç aylık dönem altı aylık faiz vadesinin yarısıdır. Nominal faiz oranı üç aylık, faiz hesaplama vadesi yıllık olduğu durumda, bir yıla karşılık gelen etkin faiz oranı verilenden dört kat büyüktür, çünkü yıl, üç ayın dört katıdır. Karşılaştırma yapmak için aşağıdaki tabloyu inceleyebilirsiniz. Orada $m = 2$, $m = 1$, $m = 4$, $m = 12$ ve benzer.

Faiz vadesi	Nominal faiz oranı	etkin (rölatif) faiz oranı
Yarım yıllık (sömestral)	%8 *p.a.*	%4 *p.s.*
Yıllık	%8 *p.s*	%16 *p.a.*
Üç aylı	%8 *p.a*	%2 *p.q.*
Aylık	%8 *p.a.*	%0,667 *p.a.*
İki yıllık	%8 *p.s*	%32
İki aylık	%8 *p.a.*	%1,333

Her dönem sonunda faiz hesaplanarak anaparaya katılırsa **dönem sonu (dekurzif) faizlenme** söz konusu olur; böyle durumda faiz oranı *p.a.(d)* ile işaret edilir. Dönem sonu faizlenmenin faiz hesaplaması başlangıçta yatırılan anaparaya göre uygulanmaktadır.

Faizlenme her dönem başlangıcında yapılırsa, dönem başı faizin hesaplanması için temel değer, dönem sonunda elde edilen anaparadır; bu işleme **dönem başı (antisipatif) faizlenme** denir ve *p.a.(a)* ile işaret edilir.

İki şekilde verilmiş olan (dönem sonu ve dönem başı) faiz oranlarından hangisi daha kârlı olduğunu anlamak için, her ikisini aynı şekilde ifade etmemiz gerekir. Bu durumda, aynı anaparadan bir yılda aynı faiz miktarı, yani aynı birikim K_1 elde edilmesi önemlidir. Faizinin belirtilmesi istenilen temel değer (anapara) K verilmiş ve faiz oranları π %*p.a.(a)* ve *p% p.a.(d)* verilmiş olsun. Faiz hesaplama şeklinin tanımlarına göre dönem sonu faizlenmede hesaplanan anaparaya katılır ve yıl sonunda $K_1 = K\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\frac{100+p}{100}$ değeri elde edilir. dönem başı faizlenmede, borçlu faiz miktarını π faiz oranıyla önceden ödemelidir. Bu demektir ki birinci dönem başlangıcında, hesaplanan faiz temel değerden çıkarıldığına göre K değerini değil $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right)$ değerini çekebilir. Bu durumda anaparanın başlangıç değeri $K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1-\frac{\pi}{100}\right)$'dir. Oradan $K_1 = K\frac{100}{100-\pi}$ olur. K_1'in son değerlerini eşitleyerek $K\frac{100+p}{100} = K\frac{100}{100-\pi}$ eşitliği, ya da $\frac{100+p}{100} = \frac{100}{100-\pi}$ denklemi elde edilir. π %*p.a.(a)* faiz oranı belli olduğu durumda, dönem sonu faiz oranını $p = \frac{100\pi}{100-\pi}$ formülüyle hesaplayabiliriz. *p% p.a.(d)* belli olduğu durumda ise dönem başı faiz oranı $\pi = \frac{100p}{100+p}$ formülüyle hesaplanabilir.

3. Bir banka %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla, diğer bir rakip banka ise %5,7 *p.a.(a)* faiz oranıyla borç veriyorlar. Hangi bankanın faiz oranı daha uygundur?

Her iki faiz oranını karşılaştıracağız. Halbuki önce dekurzif faiz oranını dönem başı faiz oranına ve tersine dönüştürmemiz gerekir.

Dönem sonu faiz oranını, dönem başı faiz oranına dönüştürüyoruz. $\pi = \dfrac{100p}{100+p} = \dfrac{100 \cdot 6}{100+6} = \%5{,}66$ *p.a.(a)* elde edilir. Buna göre %5,7 *p.a.(a)* faiz oranı veren banka daha hesaplıdır.

Buna inanmak için, ters dönüşümü de yapacağız. Dönem başı faizi dönem sonu faize dönüştürüyoruz. $\pi = \dfrac{100\pi}{100-\pi} = \dfrac{100 \cdot 5{,}7}{100-5{,}7}$ = %6,04 *p.a.(d)*. Buradan da görüldüğü gibi göre %5,7*p.a.(a)* faiz oranı daha hesaplıdır. ♦

Alıştırmalar

1. 25 000 denar paradan %15 faiz oranıyla basit faizde
a) 5 yılda b) 3 ayda c) 25 günde
(30,360) ve (*k,* 365) zaman matrislerine göre, ne kadar faiz getirir?

2. Faiz oranı %5 basit faiz ile yatırılan bir temel kapital *K,* kaç yıl bankada yatırılmalıdır ki elde edilen faiz miktarı temel değere eşit olsun? (Not. *K* = *I*).

3. 34 500 denar borç için basit faiz hesabına göre 4 yılda toplam 6 900 denar faiz ödenmiştir. Faiz oranı ne kadardır?

4. Yatırılan hangi anaparaya %6 faiz oranıyla 3 540 denar faiz miktarı ödenmiştir:
a) 4 yılda; b) 8 ayda?

5*. Bir bankaya, aralarındaki fark 12 000 denar olan iki farklı kapital yatırılmıştır. Büyük olan para miktarı %4 faiz oranıyla bir yıl için, küçük olan para miktarı ise %6 faiz oranıyla 10 ay vadeyle yatırılmıştır. Her iki kapitalin getirdiği faiz miktarı eşit olduğuna göre, iki farklı kapitalin toplamını hesaplayınız.

6. Verilen %12 *p.a.* nominal yıllık faiz oranı için şunları belirtiniz:
a) yarım yıllık vadeli etkin (rölatif) faiz oranını;
b) üç aylık vadeli etkin faiz oranını;
c) aylık vadeli etkin faiz oranını;

7. Üç aylık nominal faiz oranı %2 *p.q.* verilmiş olduğu halde şunları belirtiniz:
a) yarım yıllık etkin faiz oranını;

b) yıllık etkin faiz oranını;
c) aylık etkin faiz oranını.

8. % 10 dönem sonu faiz oranını, dönem başı faiz oranına dönüştürünüz.

9. % 10 dönem başı faiz oranını, dönem sonu faiz oranına dönüştürünüz.

10*. Hangi faiz oranı daha kazançlıdır %6 *p.a.(a)* yoksa %6,5 *p.a.(d).*

7.2. Temel Değerin Gelecekteki Değerini Hesaplamak

Bileşik faiz hesaplamalarını yaparken, faiz oranından başka, temel paranın faiz vadesi sonunda faiz miktarı kadar büyümüş değerini de bilmek gerekir, yani faizlenen değer ya da i / i. Bu durumda, tüm faiz vadesinde elde edilen faiz miktarını temel değere katmakla, elde edilen para miktarına, temel paranın **gelecekteki değeri** denir. Faizlenmesi yapılan temel değerin başlangıç miktarına **şimdiki değer** de denir.

Başlangıçta dönem sonu faiz oranıyla işlem gören K para miktarını inceleyelim. K_1, K_2,….. K_n, sırasıyla birinci yıl sonunda, ikinci yıl sonunda, …n. yıl sonunda elde edilen kapital olsun. Bu değerler bir geometrik dizinin oluşturduğunu göstereceğiz. Bu temel değerin yıllık *%p p.a.(d)* faiz oranıyla n yılda nasıl değiştiğini inceleyeceğiz. Hesaplanan her faiz miktarı dönem sonunda anaparaya katıldığını ve ilerdeki dönemde büyüyen anapara temel kapital olarak alındığını hatırlatalım. Dönem sonunda kapitalin değeri birinci yıl sonunda $K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K\left(1+\frac{p}{100}\right)$ olur.

ikinci yıl sonunda $K_2 = K_1 + \frac{K_1 p}{100} = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$

Aynı şekilde devam edersek n. yıl sonunda

$$K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1}p}{100} = K_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right) = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$ elde edilir.

Burada iki ardışık değeri K_{s-1} ve K_s ayırırsak, s yıl sonunda temel kapitalin toplam değeri, ondan önce gelen K_{s-1} değerine hesaplanan faizin katılmasıyla K_s

miktarı elde edilir, yani

$$K_s = K_{s-1} + K_{s-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{s-1}\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ olur.}$$

Buna göre, herhangi iki ardışık temel miktarın oranı, yani iki ardışık dönem sonundaki miktarların oranı:

$$\frac{K_s}{K_{s-1}} = 1+\frac{p}{100} \text{ olur.}$$

Açıktır ki, $K, K_1, K_2, \ldots K_n$ değerleri ortak çarpanı $1+\frac{p}{100}$ olan bir geometrik dizi oluşturuyorlar. Bu durumda verilen koşullara göre kapitalin son değeri için:

$$\boxed{K_n = K(1+\frac{p}{100})^n}.$$

formülü elde edilir.

Bu formülü yukarıda adı geçen parametrelerle genişleteceğiz. Bunlar bir yılda faiz dönem sayısı m, etkin faiz oranı daha doğrusu $\frac{p}{m}$, burada *p* dönem sonu faiz oranıdır ve faizlenme devrelerinin tümü *nm*'dir. Faiz vadelerinin tümü, aslında faizin hesaplandığı yıl sayısı ve faiz vade sayısının çarpımıdır.

Bu koşullarla, yani bir yılda faiz dönem sayısı m olduğunda anaparanın gelecekteki değeri için

$$\boxed{K_n = K(1+\frac{p}{100m})^{nm}}.$$

formülü elde edilir.

$r = 1+\frac{p}{100m}$ çarpanına dönem sonu faiz katsayısı denir. Bu katsayıyı anaparanın gelecekteki değer formülünde değiştirirsek

$$\boxed{K_n = Kr^{nm}}.$$

formülü elde edilir.

Not 1. Ana paranın gelecekteki değerini daha kolay biçimde hesaplamak için, $i\ /\ i$ şeklinde işaret ettiğimiz faizin faizine ait özel tablolar geliştirilmiştir. Orada, verilen faiz oranı için en çok kullanılan parametreler önceden hesaplanmış olduğuna göre hazır değerler gibi kullanılabiliyorlar. Örnek, ilk $i\ /\ i$ tablolarda faiz katsayısının değerlerini, yani bir para biriminin son değerinin dönem sonu faiz katsayısıyla çarpımını göstermektedir. Orada r^n değeri I^n_p ile işaret edilmiştir ve anaparanın gelecekteki değerini, yılda bir faizin hesaplanmasıyla, n yılda faiz oranı *%p p.a.(d)* olduğunda

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_p^n},$$

formülü elde edilir.

Faizlenme yılda birçok defa yapılırsa, formül

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}},$$

şeklini alır. Burada yıl sayısı faiz vadesi sayısıyla çarpılır, faiz oranı ise vade sayısıyla bölünür. Vade sayısı m ile işaretlenmiştir, yani yılda kaç defa faizlenme yapıldığını gösteren sayı olarak gösterilir.

1. 25 000 denar para 20 yılda %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla, faiz hesaplaması yıllık vadeli, yarım yıllık vadeli ve üç aylık vadeli olduğuna göre paranın gelecekteki değerini hesaplayınız.

Verilenler: $K = 25\,000$, $n = 20$, $p=$ %8 *p.a.(d)*.

a) Faiz hesaplaması yıllık vadeli olduğuna göre $m = 1$'dir. Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \dfrac{8}{100} = 1,08$'dir.

Açıktır ki, $K_{20} = Kr^{20} = 25000 \cdot 1,08^{20} = 116523,93$ denar olacaktır.

b) $m = 2$ olsun, yani faiz hesaplaması yarım yıllık vadeli olsun. Dönem sonu katsayı $r = 1 + \dfrac{8}{100 \cdot 2} = 1,04$, anapara ise $K_{20} = Kr^{40} = 25000 \cdot 1,04^{40} = 120025,52$ denar olur. Bu ise yıllık faiz hesaplamasından fazla olduğu görülüyor.

c) $m = 4$ olsun, yani faiz hesaplaması üç ayda bir vadeli yapılmış olsun. Dönem sonu katsayı $r = 1 + \dfrac{8}{100 \cdot 4} = 1,02$, anapara ise $K_{20} = Kr^{80} = 25000 \cdot 1,04^{80} = 121885,98$ denar olur. ♦

Dönem sonu faiz hesaplamasında faiz devrelerinin artmasıyla anaparanın (yatırımın) da gelecekteki değeri artar. Yani, faizin hesaplanması ne kadar daha sık yapılırsa r^{nm} değeri de o kadar artar, bununla yatırımın gelecekteki değeri de artar.

Nominal faiz oranı bir yıldan az vade için verildiğinde, yıllık faiz oranıyla ne olduğunu incelersek, bu durumda yıllık faiz oranı etkin faiz oranı rolünü alacaktır. $p =$ *%8 p.s.(d)* ise, bu faiz oranı sadece yarım yıl için geçerli olduğunu göz önünde bulundurarak yıllık etkin faiz oranı %16 olur. $p =$% 8 *p.q.(d)* üç aylık vadeli faiz oranı ise, etkin yıllık faiz oranı %32 olur.

2. Başlangıç değeri 25 000 denar olan bir kapitalin, p = %8 *p.m.(d)* faiz oranıyla, faiz vadesi yılda dört defa yani üç aylık faizin hesaplanmasıyla 5 yıl sonra gelecekteki değeri belirtilsin.

Önce yıllık etkin faiz oranını belirtmek gerekir, bu ise yıllık $8 \cdot 12 = \%96$'dir. Halbuki, faiz vadesi yılın dörtte biri olduğundan üç aylık vadeli faiz oranı $\dfrac{96}{4}$ = %24 olur. Bir aylık vade, üç ayda kaç defa geldiğini düşünürsek aynı sonuca varabiliriz. Bir çeyrek yıl üç ay olduğundan 3 · 8 = *%24* elde edilir. faizlenme işleminin toplam vade sayısı nm = 5 · 4 = 20'dir. Anaparanın gelecekteki değeri:

$$K_5 = 25000 \cdot \left(1 + \frac{12 \cdot 8}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 25000 \cdot \left(1 + \frac{24}{100}\right)^{20} = 25000 \cdot 1{,}24^{20} = 25000 \cdot 73{,}864\,.$$

olduğuna göre, K_5 = 1846603,74 denar olduğunu buluyoruz. □

Sıradaki örnekte, bir anaparanın gelecekteki değerini hesaplarken, bileşik faiz hesabının uygulanması ya da basit ve bileşik faiz karması kullanılmakla elde edilen farkı göreceğiz.

3. 15.09 günü 18000 denar yatırılmıştır. Faiz oranı p = %6 *p.s.(d),* faiz hesaplanması üç aylık vadelerle yılın 30.09, 30.12, 30.03 ve 30.06 günlerinde yapıldığında zaman matrisi (30, 360) koşuluyla, onuncu yılın 28.07 günü (ilk günü dahil) yatırımın değeri ne kadar olacaktır?

Yatırımın şimdiki değeri K = 18 000, faiz vadesi çeyrek yıl, yani m = 4, faiz oranı p = %6 *p.s.(d)*, yıllık rölatif faiz oranı %12 *p.a.(d)* parametreleri verilmiştir.

Karşılık gelen faiz katsayısının değeri $r = 1 + \dfrac{2p}{100m} = 1 + \dfrac{6 \cdot 2}{100 \cdot 4} = 1{,}03$ dir.

Yatırımın faizde kalma zamanını belirtmemiz gerekir. Yatırımın yapıldığı gün 15.09'den faizin ilk hesaplama gününe kadar sadece 15 gün vardır. Bu günleri verilen zaman matrisine göre yıl olarak ifade edersek $t' = \dfrac{15}{360}$ yıl olur. Ondan sonra 30.12 tarihine kadar, yani yılın sonuna kadar bir faiz devresi vardır. İkinci yılın başlangıcından dokuzuncu yılın sonuna kadar toplam 8 yıl olduğuna göre toplam 32 faiz vadesi vardır. Onuncu yıl boyunca 30.06 tarihine kadar 2 tam vade ve yatırımın kaldırılacağı güne kadar daha 28 gün vardır. Demek ki toplam 35 tam faiz vadesi ve ilk yılın $t' = \dfrac{15}{360}$ ve onuncu yılın t" = 28 gün = $\dfrac{28}{360}$ yıl faiz zamanı elde edilir.

Yatırımın gelecekteki değerini sadece bileşik faiz hesabını kullanarak hesaplıyorsak, zamanı tam vade sayısına, kalan günleri ise yıl olarak ifade edeceğiz. Buna göre:

$$K_n = Kr^{35} \cdot r^{t'm} \cdot r^{t''m} = 18000 \cdot 1{,}03^{35} \cdot 1{,}03^{\frac{15}{360}4} \cdot 1{,}03^{\frac{28}{360}4} = 51369{,}9$$

denar elde edilir.

Zamanın tamamını yıllarla ifade edersek, tam vadeler 3 aylık yani 90 gün olduğunu göz önüne bulundurarak $\frac{35 \cdot 90}{360}$ yıl olur. O halde $K_n = 18000 \cdot 1{,}03^{\frac{3193}{360} \cdot 4} = 51369{,}9$ denar olduğunu buluyoruz.

Faizde kalma zamanının sadece tam vadelerine basit faiz hesabını uygulayarak, bileşik ve basit faiz hesaplama kombinasyonu kullanalım:

$$K_n = K(1 + \frac{p}{100}t') \cdot r^{35} \cdot (1 + \frac{p}{100}t''),$$

formülünde, sırasıyla önce ilk yılın 15 günü, ondan sonra 35 tam faiz vadesi ve sonunda son yılın 28 günü yazılarak

$$K_n = 18000 \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{15}{360}) \cdot 1{,}03^{35} \cdot (1 + \frac{12}{100}\frac{28}{360}) = 51377{,}86$$

denar elde edilir. ♦

Demek ki, basit ve bileşik faiz kombinasyonunu uygulayarak yatırımın gelecekteki değeri, sadece bileşik faiz hesabı kullanarak elde edilen miktardan biraz farklaşıyorlar ve kombinasyon uygulayarak elde edilen gelecek değer biraz büyüktür.

Dönem sonu (sonra) ve dönem başı (peşin) faizlenme arasındaki temel fark, konunun başlangıcında ifade edildiği gibi, dönem sonu faizlenmede faiz miktarı dönem sonunda anaparaya eklenir, dönem başı faizlenmede ise faiz miktarı anaparaya peşin eklenir.

Dönem başı faizde borçlu, π faiz oranıyla K kapitaline gereken faiz miktarını peşin ödeme yükümlülüğünü kabul etmiştir. $K_1, K_2, \ldots, K_n$ birinci, ikinci ve benzer şekilde n- yıl sonunda kapitalin değerleri olsun.

Birinci vadesin başlangıcında borçlu K değerini değil

$K = K_1 - K_1\frac{\pi}{100} = K_1\left(1 - \frac{\pi}{100}\right) = K_1\frac{100-\pi}{100}$. değerini alabilecektir. O halde birinci yıl sonunda borçlunun yıllık (m = 1) faizlenme ile ödeyeceği miktar

$$K_1 = \frac{K}{1 - \frac{\pi}{100}} = K\frac{100}{100-\pi}.$$

elde edilir.

İkinci yıl sonunda, bileşik faiz hesaplandığına göre, faiz tabanı birinci yıl sonunda elde edilen miktardır, yani şimdi $K\dfrac{100}{100-\pi}$ dir. Demek ki, ikinci yıl sonunda

$$K_2 = K_1\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^2.$$

miktar ödenmelidir. Bu şekilde devam ederek faizlenmenin son n– ci yılına geliyoruz ve anaparanın gelecekteki değeri

$$K_n = K_{n-1}\frac{100}{100-\pi} = K\left(\frac{100}{100-\pi}\right)^n.$$

olur. Dönem başı faizlenmede kapitalin son değerleri K, K_1, K_2, ...ortak böleni $\rho = \dfrac{100}{100-\pi}$ olan bir geometrik dizi oluşturuyorlar. n- ci dönem sonunda kapitalin değeri K_n ise, $K_n = K_{n-1}\cdot\rho$ geçerlidir, yani dönem başı faizlenmede n yıl sonra kapitalin değeri

$$\boxed{K_n = K\rho^n}.\ \text{olur.}$$

$$\rho = \frac{1}{1-\frac{\pi}{100}} = \frac{100}{100-\pi}$$ katsayısına dönem başı faiz katsayısı denir.

Elde edilen formülleri, bir yılda faiz dönem sayısı m, etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı) $\dfrac{\pi}{m}$; burada π yıllık dönem başı faiz oranıdır ve faiz süresinin toplam sayısı nm parametreleriyle genişlettirirsek, kapitalin gelecekteki değeri için şu formülü elde edeceğiz:

$$K_n = K\left(\frac{100}{100-\frac{\pi}{m}}\right)^{nm} = K\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right)^{nm}.$$

Formülde dönem başı faiz oranının katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi}$ koyarsak, kapitalin gelecekteki değerine ait

$$\boxed{K_n = K\rho^{nm}},$$

formülü elde edilir.

Not 2. $i\,/\,i$ tablolarında dönem sonu hesaplamada olduğu gibi ρ^n değeri I_π^n ile işaret edilir ve yıllık faizlenmeyle şimdiki değerin (anaparanın) gelecekteki değerini hesaplamak için şu formül elde edilir:

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\pi}^{n}},$$

Buna karşılık, faizin hesaplanması yılda birkaç kez yapıldığında yukarıdaki formül

$$\boxed{K_n = K \cdot \mathrm{I}_{\frac{\pi}{m}}^{nm}},$$

şekline dönüşür. Bu durumda zaman faiz devreleriyle çarpılır, faiz oranı ise faiz dönem sayısıyla bölünür.

Son formüller dönem sonu faizlenme formülüyle aynıdır, halbuki farklı faiz katsayılarından ötürü elde edilen son değerler birbirinden farklıdır.

4. Şimdiki değeri 25 000 denar olan kapitalin, 20 yılda %8 *p.a.(a)* nominal faiz oranıyla, yıllık, yarım yıllık ve üç aylık faiz devreleriyle elde edilecek sonraki değeri ne kadardır?

Ödevdeki verilere göre $K = 25\,000$, $p =$ %8 *p.a.(a)* verilmiştir.

a) Yıllık faiz devresi $m = 1$ olsun. Önce dönem başı faiz katsayısını hesaplıyoruz: $\rho = \dfrac{100}{100-8} = 1{,}08696$.

Kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = K\rho^{20} = 25000 \cdot 1{,}08696^{20} = 132498{,}59$ elde edilir.

b) $m = 2$ olsun, yani faizin hesaplanması yılda iki defa yapıldığını alalım.

Peşin faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{200}{192} = 1{,}04166667$ olduğunu buluyoruz. Buna göre kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = K\rho^{40} = 25000 \cdot 1{,}04166667^{40} = 127964{,}85$ denar olduğunu buluyoruz. Görüldüğü gibi, yıllık faizlenmeyle elde edilen gelecekteki değer göre, yarım yıllık faizlenme ile elde edilen gelecekteki değer biraz azalmıştır.

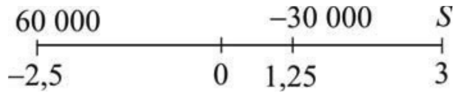
c) $m = 4$ olsun, yani faizin hesaplanması her üç ayda yani yılda 4 defa yapıldığını alalım. Peşin faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100m}{100m-\pi} = \dfrac{400}{392} = 1{,}020408$ olduğunu buluyoruz. Buna göre kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = K\rho^{80} = 25000 \cdot 1{,}020408^{80} = 125848{,}6$ denar olduğunu buluyoruz. ♦

Peşin faiz hesaplanmasında, faiz devrelerinin artmasıyla kapitalin gelecekteki değeri azalmaktadır.

Dönem sonu ve peşin faizin hesaplanmasıyla elde edilen gelecekteki değerleri birbiriyle karşılaştırırsak aynı koşullar altında dönem başı faizlenme ile dönem sonu faizlenmeden daha büyük değer verir. Buna göre borç kredi alındığında alacaklıya dönem başı faiz hesaplaması daha hesaplıdır, borçluya ise dönem sonu faiz hesaplaması daha kârlıdır.

5. 2 yıl ve 6 ay önce bankaya 60 000 denar yatırmış ve bir yıl ve 3 ay sonra 45000 denar çekmemiz gerekir. Faiz oranı %6 *p.a.(d)*, faiz hesaplaması 3 aylık devrelerle yapıldığında bu günden 3 yıl sonra yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır? Aynı koşullar altında fakat dönem başı faizlenme ile paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır?

Her miktarın ayrı ayrı gelecekteki değerini hesaplayacağız. Yatırılan miktar için faiz süresi 5,5 yıl, çekilen miktar için faiz süresi bir yıl ve 3 ay ve bu günden sonra 3 yıl sonraki toplam zaman süresi 1 yıl 9 aydır ya da 21 aydır (şek. 1).



Şek.1

Dönem sonu faiz katsayısından $r = 1 + \frac{6}{4 \cdot 100} = 1{,}015$, yararlanarak miktarın 3 yıl sonra gelecekteki değeri

$$S = 60000 \cdot r^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot r^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015^{22} - 45000 \cdot 1{,}015^{7} = 33310{,}8$$

denar olduğunu buluyoruz.

Peşin faiz hesaplanmasıyla faiz katsayısı $\rho = \frac{100}{100 - \frac{6}{4}} = \frac{400}{400 - 6} = 1{,}015228$ dir. Bu durumda miktarın gelecekteki değeri

$$S = 60000 \cdot \rho^{5{,}5 \cdot 4} - 45000 \cdot \rho^{4 \cdot \frac{21}{12}} = 60000 \cdot 1{,}015228^{22} - 45000 \cdot 1{,}015228^{7},$$

elde edilir, yani S = 33644,62 denar olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. 18 yıl 8 ay ve 20 gün evvel %8*p.a.(d)* faiz oranıyla 20 000 denar yatırılmıştır:

a) faiz devresi yıllık; b) faiz devresi üç aylık

olduğuna göre, yatırılan paranın bugünkü değeri ne kadardır? Hesaplamaları önce bileşik faiz hesabıyla, sonra bileşik faiz ve basit faiz kombinasyonuyla hesaplayınız.

2. 9000 denar ilk 5 yılda %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz devresiyle, ondan sonra daha 4 yıl %8 *p.q.(d)* faiz oranıyla ve aylık faiz devresiyle ve sonunda daha 2 yıl, %7 *p.s.(d)* faiz oranıyla ve üç aylık faiz devresiyle bir bankaya yatırılmıştır. Yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

3*. 9000 denar ilk 5 yılda %6 *p.a.(a)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz devresiyle, ondan sonra daha 4 yıl %8 *p.q.(a)* faiz oranıyla ve aylık faiz devresiyle ve sonunda daha 2 yıl, %7 *p.s.(a)* faiz oranıyla ve üç aylık faiz devresiyle bir bankaya yatırılmıştır. Yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

4. 2 yıl 3 ay önce 40 000 denar ve bugün daha 24 000 denar bankaya yatırılmıştır. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* ve yarım yıllık devrelerde faizin hesaplanmasıyla bu günden dördüncü yılın sonuna kadar yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

5*. Bugün 30 000 denar bankaya yatırıyoruz, üç yıl sonra ise 12 000 denar çekecek ve beş yıl sonra daha 20 000 denar yatırılacaktır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faiz hesaplanması üç aylık olduğuna göre bu günden 8 yıl sonra bankada ne kadar paramız olacaktır? Faiz oranı %6 *p.a.(a)* uygulandığı durumda elde edilen gelecekteki değeri ilki ile kıyaslayınız.

6*. Dört yıl önce 30 000 denar ve bugün daha 9 000 denar bankaya yatırılmış, iki yıl sonra 36 000 denar çekilecektir. Yatırımlara %6 *p.a.(d)* faiz oranı ve yarım yıllık devrelerde faizin hesaplanması uygulanmaktadır. Bu günden sekiz yılın sonuna kadar yatırılan paranın gelecekteki değeri ne kadardır?

7*. 15 yıl önce 7 000 denar, 9 yıl önce daha 4 000 denar bankaya yatırılmış ve 5 yıl önce hesaptan 5 000 denar çekilmiştir. Faiz işlemi üç aylık devrelerle %5*p.a.(d)* faiz oranıyla yapıldığına göre paranın bugünkü değeri ne kadar olacaktır?

7.3. Konform Faiz Hesabı

Dönem sonu yani faizin dönem sonu hesaplanması söz konusu olunca, pratik nedenlerden dolayı, şimdiye dek kullandığımız faiz oranlarından farklı bir cins faiz oranına ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun sebebi, bir yılda faiz devrelerinin artmasıyla faiz miktarının artışının sonucu olarak dönem sonu faizlenmede, kapitalin değeri de artar ve bazı anlaşmazlıklara sebep olabilir. Etkin faiz oranını uygulamakla sadece ana değerin faizi değil, faizin de faizi hesaplanmaktadır. Bu durumda temel değerin yıllık faizlenme ile ve yılda birkaç defa faizlenme ile elde edilecek gelecekteki değerler arasında fark ortaya çıkmaktadır. Bu farkı ortadan kaldırmak istersek, etkin faiz oranı yerine **konform faiz oranı** denilen faiz oranını uygulayacağız. Bu faiz oranıyla, faiz ister yıllık hesaplamayla, ister yılda birkaç devreden faizin hesaplanmasıyla aynı faiz miktarı elde edilir. Konform faiz oranını $p_{k,m}$ ile işaret edeceğiz. Bir yılda m defa faizlenme ile ve yılda bir defa faiz oranı p olmak üzere yapılan faizlenme ile aynı faiz miktarı veren **konform faiz oranı** şu iki formüllerin eşitlenmesiyle elde edilir:

$$K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = K\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

oradan da

$$\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^m = \left(1+\frac{p}{100}\right).$$

elde edilir. Bu denklemden konform faiz oranı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{p_{k,m} = 100\cdot\left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}}-1\right)}.$$

Elde edilen konform faiz oranı, daima etkin faiz oranından küçüktür.

1. Yıllık nominal faiz oranı p = %12 *p.a.(d)* olduğuna göre, üç aylık konform faiz oranı ne kadardır? Elde edilen faiz oranını, etkin faiz oranıyla (rölatif faiz oranıyla) karşılaştırınız. Ondan sonra 10000 denar anaparanın her iki faiz oranıyla bir yıl sonunda gelecekteki değerlerini hesaplayarak karşılaştırınız.

Faiz dönem sayısı $m = 4$'tür. Yukarıda elde edilen formülden $p_{k,4} = 100\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{12}{100}}-1\right) =$ *%2,87.* elde edilir. Diğer taraftan üç aylık etkin faiz oranı $\frac{12}{4}$ = *%3* olduğunu buluyoruz. Görüldüğü gibi, etkin faiz oranı konform faiz oranından büyüktür. Konform faiz oranını verilen anaparaya uygulayarak gelecekteki değeri $K_1 = 10000\cdot\left(1+\frac{2{,}87}{100}\right)^4 = 11198{,}37$ denar elde edilir. Etkin faiz oranını uygulamakla $K_1' = 10000\cdot\left(1+\frac{12}{4\cdot 100}\right)^4 = 11255$ denar elde edilir. ♦

2. 25000 denar, 20 yılda, nominal faiz oranı %8 *p.a.(d)* , faizlenme yarım yıllık ve üç aylık olmak üzere, konform faiz oranını kullanıldığında anaparanın gelecekteki değerini hesaplayınız.

a) $m = 2$ olsun. Yılda iki faizlenmeye karşılık gelen konform faiz oranı $p_{k,m} = 100\left(\sqrt{1+\frac{8}{100}}-1\right) = 3{,}923\%$. dir. Anaparanın gelecekteki değeri için,

$K_{20} = K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{40} = 25000\cdot 1{,}03923^{40} = 116521{,}755$. elde edilir. Bu şekilde elde edilen kapital, rölatif faiz oranıyla yapılan hesaplamaya göre elde edilen kapitalden küçüktür, halbuki yıllık faizlenme ile elde edilen kapital ile hemen de aynı olduğunu görebiliriz.

Örnek, etkin faiz oranını uygulayarak $K_{20}' = 25000\cdot\left(1+\frac{8}{2\cdot 100}\right)^{40} = 120025{,}52$ denar, yıllık faizlenme ile $K_{20}'' = 25000\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)^{20} = 116523{,}93$ denar elde edilir.

b) $m = 4$ olsun. Konform faiz oranı $p_{k,m} = 100\left(\sqrt[4]{1+\frac{8}{100}}-1\right) = 1{,}943\%$. Konform faiz oranıyla kapitalin gelecekteki değeri $K_{20} = K\left(1+\frac{p_{k,m}}{100}\right)^{20\cdot 4} = 25000\cdot 1{,}01943^{80} = 116555{,}51$ denardır. Etkin faiz oranını kullanmakla $K_{20}' = K\left(1+\frac{8}{4\cdot 100}\right)^{80} = 25000\cdot 1{,}02^{80} = 121885{,}98$ denar elde edilir. Yılda bir faizlenme işlemi yaparak K_{20}'' = 2116523,93 denar elde edilir. ♦

Yıllık faizlenme ile ve dönem faizlenme ile yapılan işlemlerde kapitalin gelecekteki değeriyle ilgili meydana gelen sapmalar, Konform faiz oranında yapılan yuvarlamadan kaynaklanır.

Alıştırmalar

1. Bugün yatırılan 28 000 denar %2*p.q.(d)* faiz oranıyla, yarım yıllık dönem faizlenme işlemi uygulayarak 2 yıl 9 ay sonra hangi değere bağlı olacaktır? Konform faiz oranını uygulayınız.

2. Bugün 20 000 denar yatırıp, iki yıl sonra 7 500 denar çekilecektir. Faiz oranı %9 *p.s.(d)*, dönem vadesi 3 ay olmak üzere, bu günden üç yıl sonra ne kadar paramız olacaktır?

3. Bankaya 20000 denar: a) etkin faiz oranı; b) konform faiz oranı %8*p.a.(d)* ve faiz hesaplama vadesi 3 ay olmak koşullarıyla para yatırdık. 10 yıl sonra ne kadar paramız olacaktır?

4. Üç aylık faiz vadesine ait %1,467 konform faiz oranını yıllık faiz oranına dönüştürünüz.

5. %8 *p.a.(d)* faiz oranını veriliyor. Yarım yıllık ve üç aylık faiz vadesine karşılık gelecek konform faiz oranını hesaplayınız.

6*. 15 yıl önce bankaya 7 000 denar, 9 yıl önce daha 4 000 denar yatırılmış, 5 yıl önce ise hesaptan 5 000 denar çekilmiştir. Faizin hesaplanması 3 aylık vadelerle ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yapıldığına göre, hesabımızda bugüne kadar ne kadar para birikmiştir. Konform faiz oranını hesaplayınız.

7.4. Yatırılan Paranın Başlangıç Değeri ve Faiz Miktarının Hesaplanması

Bazı durumlarda, belli bir zamanda, belli faizlenme oranıyla ne kadar paraya ihtiyacımız olacağını biliyor, fakat bunun için bankada ne kadar paranın yatırılması gerektiğini bilmiyoruz. Aslında, faiz oranını, yıl içindeki faiz dönem sayısını m ve faiz zamanı n ile biriken K_n değeri bilindiğine göre, K başlangıç miktarını yani anaparayı hesaplamamız gerekir. Verilen kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için elde ettiğimiz formülden, temel değer için şu formülleri belirtebiliriz:

$$K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1+\frac{p}{100m})^{nm}},$$ dönem sonu faizlenme için ve

$$K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1 - \frac{\pi}{100m}\right)^{nm},$$ dönem başı faizlenme için.

Biriken paranın başlangıç değerini bulma işlemine, **iskontolama,** ya da biriken değerin başlangıç değerini belirtme denir. Faiz oranlarının çarpımsal ters r^{-nm} ve ρ^{-nm} değerlerine **iskonto katsayıları (faktörleri)** denir.

Not 1. Burada önemli olan *i / i* tablolarından yararlandığımızda neler oluyor bilmemiz gerekir. Dönem sonu ve dönem başı faizlenmenin katsayıları na karşılık gelen I_p^n ve I_π^n değerler yanı sıra, değerleri ikinci tabloda okunan $II_p^n = \frac{1}{I_p^n} = r^{-n}$ ve $II_\pi^n = \frac{1}{I_\pi^n} = \rho^{-n}$ iskonto katsayıları da belirtilir. İkinci tablolardaki değerler, birinci tablolardaki değerlerin çarpımsal tersleridir. Buna göre temel değerin başlangıç değerini belirtmek için formüller

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_p^n},$$

yıllık dönem sonu faizlenme için ve

$$\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}_\pi^n},$$

yıllık dönem başı faizlenme için şeklinde yazabiliriz.

Tabi ki, yılda birkaç defa faizlenme yapılıyorsa zaman süresi faiz dönem sayısıyla çarpılır, faiz oranı ise yıl içindeki faiz dönem sayısıyla bölünür. Buna göre başlangıçtaki temel değer $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^{nm}_{\frac{p}{m}}}$, dönem sonu faizlenme için ve $\boxed{K = K_n \cdot \mathrm{II}^{nm}_{\frac{\pi}{m}}}$, dönem başı faizlenme için formülleriyle hesaplanabilir.

1. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve yıllık faiz vadesiyle dört yılda 68 000 denar biriktirmemiz gerekirse, bankaya ne kadar para yatırmamız gerekir?

Burada $m = 4$, $K_4 = 68\,000$, $p = \%6\ p.a.(d)$ olduğu açıktır. Önce faiz katsayısını ondan sonra iskonto katsayısını hesaplayalım. $r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$. Buna karşılık iskonto katsayısı $\frac{1}{r} = 0,9434$ elde edilir. O halde başlangıç (yatırılması gereken) kapital $K = \frac{68000}{1,06^4} = 68000 \cdot 0,9434^4 = 53862,3$ denar olduğunu buluyoruz. ♦

2. Hangi temel değer dört yılda dönem süresi:

a) yarım yıl; b) üç ay

olmak üzere yatırmalıyız ki, gelecekteki değeri 10 000 denar olsun?

Temel değerin gelecekteki değeri $K_4 = 10\,000$ denardır. Her iki durumu ayrı ayrı inceleyeceğiz.

a) $m = 2, r = 1 + \frac{8}{200} = 1,04$, demek ki $K = 10000 \cdot 1,04^{-4 \cdot 2} = 7306,9$ denardır;

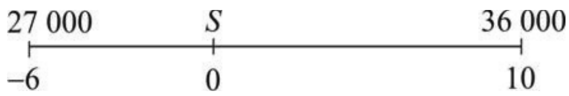
b) $m = 4, r = 1 + \frac{8}{400} = 1,02$, oradan $K = 10000 \cdot 1,02^{-4 \cdot 4} = 7284,46$ denar elde edilir. ♦

3. Altı yıl önce 27 000 denar borç alınmış, on yıl sonra ise daha 36 000 denar borcun ödenmesi gerekir. Önceki borcumuzu ödeme imkanı olmadığını varsayarak %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faizlenme ile bugün tüm borcu birden ödemek istersek hangi miktar parayı ödemeliyiz? Aynı koşullarla fakat faizlenme dönem başı (peşin) olmak üzere hangi miktar parayı ödemeliyiz?

Borcu geriye çevirmediğimiz takdirde, onun değeri bugüne dek, faiz dönem sayısı 12 ve %2 *p.s.(d)* etkin faiz oranıyla elde edilecek faiz miktarı kadar artmıştır. Demek ki, ödenmemiş borç bugün:

$27000 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{12} = 27000 \cdot 1,02^{12}$. olacaktır. Aynı zamanda ikinci boru süresinden önce ödediğimize göre, değeri 10 yıl için geri iskontolanacaktır ve

$36000 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-20} = 36000 \cdot 1,02^{-20}$ olacaktır (şek.2).



Şek. 2

Bu günün toplam borcu, hesaplanan her iki borcun toplamıdır. Buna göre, tüm borcu bugün ödersek aranılan miktar:

$S = 27000 \bullet 1{,}02^{12} + 36000 \bullet 1{,}02^{-20} = 58469{,}5$ denardır.

Faizlenme dönem başı yapıldığı durumda , faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100}{100-2} = 1{,}020408$. denar olur. Buna göre gereken para miktarı:

$S = 27000 \cdot 1{,}020408^{12} + 36000 \bullet 1{,}020408^{-20} = 88330{,}94$ denardır.♦

Bankaya yatırılan para miktarına (ya da geri çevrilmesi istenen borca hesaplanan faiz miktarı ne kadardır sorusu da sorulabilir. Kapitalin ilk ve gelecekteki değerlerini bildiğimize göre, hesaplanan faiz miktarı aslında bu iki değerin farkı olduğu açıktır. Faizlenmenin n–ci dönem sonunda hesaplanan faiz miktarını I_n ile işaret edersek, faizlenme şekli ne olursa olsun onun değeri $I_n = K_n - K$ formülüyle hesaplanır.

Daha konkre olarak, faiz oranı p ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olan dönem sonu faizlenmede faiz miktarı için:

$I_n = K_n - K = Kr^{nm} - K = K(r^{nm} - 1)$,

formülü elde edilir, burada r dönem sonu faiz katsayısıdır.

Peşin (dönem başı) faizlenme durumunda faiz oranı π ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olmak üzere faiz miktarı için:

$I_n = K_n - K = Kp^{nm} - K = K(p^{nm} - 1)$,

elde edilir; burada ρ dönem başı faiz katsayısıdır.

Aynı formüller, para miktarının sadece son değeri yani gelecekteki değeri bilindiğinde de yazılabilir. Bu durumda dönem sonu hesaplamada:

$$I_n = K_n - K = K_n - K_n r^{-nm} = K\left(1 - r^{-nm}\right),$$

ve dönem başı hesaplamada

$$I_n = K_n - K = K_n - K_n \rho^{-nm} = K\left(1 - \rho^{-nm}\right).$$

olduğunu buluyoruz.

Not 2. $i\,/\,i$ tablolarından yararlanıyorsak, formüller: dönem sonu hesaplama durumunda $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{p}{m}} - 1 \right)$, ve dönem başı hesaplamada $I_n = K \cdot \left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{\pi}{m}} - 1 \right)$, şeklinde ifade edilir. Para miktarının sadece gelecekteki değerini kullandığımız durumda aynı formüller $I_n = K_n \left(1 - \mathrm{II}^{nm}_{\frac{p}{m}} \right)$, ve $I_n = K_n \left(1 - \mathrm{II}^{nm}_{\frac{\pi}{m}} \right)$ biçiminde ifade edilir.

4. On yıl önce %6 *p.a* faiz oranı bazında yarım yıllık faiz vadesiyle 10 000 denar para yatırılmıştır. Bileşik faiz hesabına göre

a) dönem sonu; b) dönem başı

faizlenme uygulayarak bu miktar paranın faiz miktarı ne kadardır?

Kapitalin başlangıç değeri $K = 10\,000$ denar, etkin faiz oranı %3 ve bir yıl içindeki faiz dönem sayısı $m = 2$ biliniyor. Bu durumda toplam faiz dönem sayısı 60'tır.

a) Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$. olur. Hesaplanan faiz miktarı $I_{30} = K_{30} - K$ $= 10000 \bullet (1{,}03^{60} - 1) = 48196$ denar olduğunu buluyoruz.

b) dönem başı faiz katsayısı $\rho = \frac{100}{100-3} = 1{,}03093$, olur. Hesaplanan faiz miktarı $I_{30} = K_{30}$ $- K = 10000 \bullet (1{,}03093^{60} - 1) = 52194{,}3$ denar olduğunu buluyoruz.

Son örnekten de görüldüğü gibi, dönem başı faizlenme alacaklıya, dönem sonu faizlenme ise borçlulara daha uygun olduğunu kanıtlamaktadır.

5. Bugün yatırılan para, bir yıl altı ay içinde 36 000 denar paraya birikir. Faiz oranı %8 *p.a* ve faiz vadesi 3 ay olduğuna göre,

a) dönem sonu; b) dönem başı

biçimde hesaplanan faiz miktarı ne kadardır?

Kapitalin gelecekteki son değeri $K_{1,5} = 36\,000$ denar, $m = 4$ ve toplam faiz dönem sayısı 6 olduğunu biliyoruz.

a) İskonto dönem sonu katsayısı $\frac{1}{r} = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}9804$, ve bu durumda hesaplanan faiz miktarı $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \frac{1}{r^6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}9804^6\right) = 4031{,}5$ denardır.

b) İskonto dönem başı katsayısı $\frac{1}{\rho} = \frac{100-2}{100} = 0{,}98$, ve bu durumda hesaplanan faiz miktarı $I_{1,5} = K_{1,5}\left(1 - \rho^{-6}\right) = 36000 \cdot \left(1 - 0{,}98^6\right) = 4109{,}67$ denardır.

Alıştırmalar

1. 20 yıl önce bankaya yatırdığımız bir miktar paranın biriken bugünkü değeri 250000 denardır. Faizde kaldığı sürede faizlenme vadesi 3 aylık ve faiz oranı:

a) $p = \%6$ *p.a.(d);* b) $\pi = \%6$ *p.a.(a)*

olduğuna göre bankaya 20 yıl önce ne kadar para yatırmışız?

2. Bir kişi, 2 yıl sonra 16 000 denar, 5 yıl sonra 24 000 denar ve 8 yıl sonra 18 000 denar ödemelidir. Faiz oranı %6 *p.a.* yarım yıllık faizlenme ile

a) dönem sonu; b) dönem başı

olmak üzere, kişi borcun tümünü bugün ödemek isterse, ne kadar para ödemelidir?

3. Bir kişi, 38. yaş gününde bankaya %48 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve aylık faiz dönemleriyle 50 000 denar para yatırıyor. Tam bir yıl sonra yatırılan paraya ne kadar faiz ödenmiştir?

4*. Bir kişi bankaya 50 000 denar para yatırmış ve iki yıl sonra hesaptan 30 000 denar çekmiştir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*, üç aylık faiz dönemleriyle, bu günden beş yıl sonra zaman süresinde ne kadar faiz miktarı ödenecektir?

(Not: Faiz miktarı iki kısımdan hesaplanmalıdır. Bu günden sonra iki yıl için ve para çekildikten sonra kalan para miktarı için faiz hesaplanacaktır.)

5*. Bir kişi dört yıl önce 24 000 denar olmak üzere borcunun bir kısmını ödemiştir. Üç yıl sonra daha 30 000 denar ödemelidir. Kişi borcunun hiçbir kısmını ödememiş olduğu varsayımıyla, iki yıl sonra borcun tümünü birden ödemek için kaç para ödeyecektir? Yıllık dönem sonu faizlenme olmak üzere, faiz oranı %6 *p.a.* olsun. Dönem başı faizlenme durumunda ise ne kadar para ödeyecektir?

7.5. Faiz Dönem Sayısını ve Faiz Oranının Hesaplanması

Şimdiye dek elde edilen formüllerde n yıl sayısı olarak önceden bilinen ve genellikle yıl içinde faiz dönem sayısı tam olarak verilmiş şekilde ifade ediliyordu. Zaman süresi yıl olarak değil başka şekilde verildiği durumlarda yine zaman süresini yıl bazına çevirerek hesaplamaları yapıyorduk. Bu ise pratikte, özellikle faizlenme zamanını hesaplarken çok seyrek rastlanmaktadır. Verilen bir kapitalin belli miktarda faiz getirdiği zamanı ya da faiz dönem sayısının nasıl hesaplandığını göreceğiz. Başlangıç kapital K, dönem sonu faizlenme p% *p.a.(d)* faiz oranıyla, yıl içindeki dönem sayısı m ve faiz süresi tam sayı olmak mecburiyetinde olmayan n yıl olsun. Kapitalin gelecekteki değerini hesaplayan formülü $K_n = K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}$, dönüşümler yaparak n faiz süresini bulalım. Buna göre,

$$\frac{K_n}{K} = \left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

bu ifadenin logaritmasını alarak

$$\log\frac{K_n}{K} = \log\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm}.$$

elde edilir.

Logaritma işleminin temel özelliklerinden yararlanarak $\log\frac{K_n}{K} = nm\log\left(1+\frac{p}{100m}\right)$. elde edilir.

Formülde $r = 1+\frac{p}{100m}$ dönem sonu faiz katsayısını katarak, faiz süresine ait

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log r}\log\frac{K_n}{K}},$$

formülü elde edilir.

10 tabanlı logaritmalar çok sık *e* tabanına göre logaritma ile değiştirilir. Böyle durumda elde edilen formülün karşılığı olan:

$n = \frac{1}{m\ln r}\ln\frac{K_n}{K}$ · formül elde edilir.

Benzer şekilde, faizlenme dönem başı olduğu durumda, faiz oranı %π *p.a.(a)*, yıl içindeki faiz dönem sayısı *m* olduğunu varsayarak, kapitalin gelecekteki değer formülünün logaritmasını almakla:

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\left(\frac{100m}{100m-\pi}\right).$$

elde edilir. Bu ifadede $\rho = \frac{100m}{100m-\pi}$ dönem başı faiz katsayısını katmakla

$$\log\frac{K_n}{K} = nm\cdot\log\rho\,,$$

elde edilir. Bu şekilde faiz süresine ait

$$\boxed{n = \frac{1}{m\log\rho}\log\frac{K_n}{K}}$$

formülü elde edilir.

1. a) Yatırılan 25 000 denar para, %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla kaç yıl sonra 29851,31 denar olacaktır?

b) Yatırılan 13200 denar paranın, %8 *p.a.(a)* faiz oranıyla kaç yıl sonra gelecekteki değeri 18425,7 denar olacaktır?

Ödevde verilen veriler, zamanın hesaplanması için yukarıdaki formülün uygulanmasına yeterlidir. Faiz katsayısını hesapladıktan sonra, formülde yerine koyarak:

a) $r = 1+\frac{6}{200} = 1{,}03$, oradan $n = \frac{1}{2\log 1{,}03}\log\frac{29851{,}31}{25000} = 3$ yıl elde edilir.

b) $\rho = \frac{100}{100-8} = 1{,}0869565$, oradan $n = \frac{1}{\log 1{,}0869565}\log\frac{18425{,}7}{13200} = 4$ yıl olduğunu buluyoruz. ♦

Formülde uygulanan logaritma işlemi, kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için elde edilen formülde bilinen tüm veriler değiştirildikten sonra da yapılabilirdi.

Kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için kullanılan *i / i* tablolarından zamanı da belirtebiliriz. Bunu birinci *i / i* tablodan okuyarak ya da kapitalin başlangıç değerine ait ikinci *i / i* tablodan okuyabiliriz.

2. Yatırılan 200 000 denar paraya, yıllık faizlenme uygulayarak, %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla kaç yıl sonra gelecekteki değeri 243 101,25 denar olacaktır?

Kapitalin gelecekteki değeri $K_n = K \cdot I_p^n$ formülünden faiz oranı katsayısı için $I_5^n = \dfrac{243101,25}{200000} = 1,21550625$ elde edilir. Birinci finansal tabloda, %5 faiz oranı bölümünde 1,21550625 değeri $n=4$ satırına karşılık gelir.♦

Halbuki, *i / i* tablolardan yararlandığımızda bazı durumlarda aradığımız değer tam olarak tabloda olmayabilir, ancak aradığınız değer tablodaki iki değer arasında bulunabilir. Böyle durumlarda doğrusal interpolasyon (ara kestirim) yöntemi denilen kuralı uyguluyoruz. Lineer interpolasyon yöntemi denilen kuralın ilkesi, aslında orantıların özelliğine dayanır. Yani, tabloda ardı sıra gelen iki değerin farkı, onların peryotları arasındaki fark ile orantılıdır. Bunu konkre bir örnekle inceleyelim.

3. Yatırılan 50 000 denar, yarım yıllık faizlenme dönemleriyle %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla ne kadar zaman sonra 75 000 denara birikecektir?

Kapitalin gelecekteki değeri formülünde, tabloları kullanarak $K_{2n} = K \cdot I_{\frac{p}{2}}^{2n}$ değerini $I_{\frac{p}{2n}}^{2n} = \dfrac{K_{2n}}{K} = \dfrac{75000}{50000} = 1,5$ elde edilir. Birinci *i / i* tabloda %3 etkin faiz oranına karşılık gelen sütunda 1,5 değerini bulamıyoruz. Bu sayı 1,46853371 < 1,5 < 1,51258972 arasında bulunmaktadır. Bunlara karşılık gelen satırlardan, küçük değere 13, büyük değere ise 14 faiz dönem sayısı karşılık gelir. Ödevimizin cevabı, 13 ve 14 sayıları arasında olan yarım yıl sayısıdır. Bunu tam olarak belirtmek için aşağıdaki tabloyu oluşturuyoruz:

$I_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$	$I_{\frac{p}{2}}^{2n}$	$2n$
1,46853371	13	1,46853371	13
1,51258972	14	1,5	$2n$

Daha uygun görünürlük sağlamak için, sütunlardaki değerlerin farklarını hesaplayarak aynı tabloda yazdıktan sonra şu orantıyı kuruyoruz:

(1,51258972 -1,46853371): (14 -13) = (1,5 -1,46853371): (2n -13).

Demek ki,

$$2n-13=\frac{0{,}03146629}{0{,}04405601},$$

oradan da $2n$ = 13,714 elde edilir. Demek ki, faiz süresi n = 6,857 yıldır. Bu sayıyı, yıl ay ve günlere çevirmek için, sayının ondalık kısmını 12 ile çarparak ayları buluyoruz, elde edilen sayının yeni ondalık kısmını 30 ile çarpmakla gün sayısını elde ediyoruz. Buna göre 0,857 kısım yıl, aslında $0{,}857\cdot 12=10{,}284$ aydır. Şimdi, 0,284 ay kısmını günlere çevirelim: $0{,}284\cdot 30\approx 9$ gündür. O halde, faiz süresi 6 yıl 10 ay 9 gün olduğunu buluyoruz. ♦

Aynı şekilde, faiz süresini hesaplamak için ikinci finansal tabloyu da kullanabiliriz.

4. Yatırılan 20 000 denar kapital %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve yarım yıllık faiz vadesiyle, ne kadar zamanda 80 000 denara bağlı olacaktır?

a) Önce çözümü formülü doğrudan doğruya kullanarak logaritma işlemi yardımıyla belirtelim. Faiz katsayısı r = 1,03, m = 2 olduğuna göre, kapitalin gelecekteki değeri formülünde değiştirerek $\frac{80000}{20000}=1{,}03^{2n}$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının logaritmasını alırsak, log 4 = $2n\cdot$ log 1,03, oradan da n = 23,4527 yıl elde edilir.

b) Aynı sonuca, ikinci finansal tabloyu kullanarak nasıl varıldığını görelim. $K=K_n II_3^{2n}$ formülünden $II_3^{2n}=\frac{1}{4}=0{,}25$ elde edilir. Bu değer %3 sütununda bulunmadığına göre, buna en yakın iki ardışık değeri buluyoruz: 0,2493 < 0,25 < 0,2567. Küçük olan değer 47 yarım yıl vadesine , küçük olan değer ise 46 faiz vadesine karşılık gelir. Bu değerleri tabloda yazdıktan sonra, orantıyı daha kolay kurmak için son satırda değerlerin farklarını da yazacağız.

II_3^{2n}	$2n$	II_3^{2n}	$2n$
0,2567	46	0,2567	46
0,2493	47	0,25	$2n$
0,0074	-1	0,0067	$46-2n$

Karşılık gelen orantı:

0,0074 : (-1) = 0,0067 : (46 - $2n$),

dir. Negatif işaretten kurtulmak için:

0,0074 = 0,0067: ($2n$ - 46). biçiminde yazabiliriz.

Şimdi, $2n-46=\frac{0,0067}{0,0074}=0,9054$, oradan da $2n$ = 46-9054 elde edilir. Buna göre faiz dönem süresi n = 23,4527 yıl olduğunu buluyoruz; bu ise tam 23 yıl 5 ay 13 gündür. ♦

Çözülen her iki örnekte dönem sonu faizlenme söz konusudur. Faizlenme dönem başı olduğu durumda da aynı şekilde ifade edilir. Böyle durumda karşılık gelen dönem başı tablolar ve dönem başı faiz katsayısı ya da iskonto katsayısı belirtilir. Doğrusal interpolasyonun uygulanması aynı şekilde yapılır.

Yukarıda elde edilen formüllere gereken cebirsel dönüşümleri yaparak, kapitalin başlangıç ya da gelecekteki değeri formüllerinde, faiz oranının değeri hariç diğer parametreler bilindiğinde, bilinmeyen faiz oranını da belirtebiliriz.

Dönem sonu faiz oranı %*p p.a.(d)*, yıl içindeki faiz dönem sayısı *m*, faiz süresi *n* yıl olan bir faizlenmeyi inceleyelim. Kapitalin gelecekteki değerini hesaplamak için uygulanan

$$K_n=K\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm},$$

formülünden, $1+\frac{p}{100m}=\sqrt[mn]{\frac{K_n}{K}}$ elde edilir. Bu denklemden faiz oranı için:

$$p=100m\cdot\left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}-1\right)$$

formülü elde edilir.

5. Hangi yıllık dönem sonu faiz oranıyla 8 yılda, dört aylık faiz dönemleriyle bir anaparanın getirdiği faiz miktarı kendisine eşit olacaktır?

Ödevin koşuluna göre $I_8=K$ dir. Bunu $I_8=K_8-K$ faiz denkleminde yerine koyarsak $K=K_8-K$ elde edilir . O halde $K_8=2K$ olur. $n=8$, $m=3$ değerlerini yukarıda elde edilen faiz oranı formülünde değiştirmekle:

$$p=300\cdot\left(\sqrt[24]{\frac{2K}{K}}-1\right)=300\cdot\left(\sqrt[24]{2}-1\right)=8{,}79\%\ p.a.(d).$$

elde edilir.

Aynı örnekte, faiz oranını hesaplamak için kullanılan $i\,/\,i$ tablolarından faiz oranının nasıl hesaplandığını gösterelim. Yukarıdaki örneklerde bilinmeyen zamanın belirtilmesinde uygulanan doğrusal interpolasyondan, şimdi yapılacak işlemin tek farkı, tablo değerlerinden başka, tabloda etkin faiz oranlarını da yazacağız. Böylece, yukarıdaki veriler gereğince $I_n=K\cdot\left(\mathrm{I}_{\frac{p}{m}}^{nm}-1\right)$, faiz hesaplama formülünde verileri yerlerine değiştirmekle

$$I_8 = K \cdot \left(\mathrm{I}^{nm}_{\frac{p}{m}} - 1 \right),$$

elde edilir. Bu durumda $I_8 = K$ olduğuna göre, birinci finansal tablonun değeri için $I^{24}_{\frac{p}{3}} - 1 = 1$ buradan da $I^{24}_{\frac{p}{3}} = 2$ elde edilir. $i\ /\ i$ tablosunda, faiz oranı sütununda %2,75 faiz oranına karşılık 1,917626 değeri elde edilir; faiz oranı sütununda ise %3 faiz oranına 2,0327491 değeri karşılık gelir. Bizim aradığımız değer tam bu iki değer arasındadır. Tabloda okuduğumuz değerleri yazacağız.

$\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}$	$\frac{p}{3}$	$\mathrm{I}^{24}_{\frac{p}{3}}$	$\frac{p}{3}$
1,917626	*%2,75*	1,917626	*%2,75*
2,0327941	*%3*	2	$\frac{p}{3}$
0,115168	*%0,75*	0,0823739	$\frac{p}{3} - 2{,}75$

Tablodaki değerlerin farkları, faiz oranlarının farklarıyla aynı orantıda olduğuna göre şu orantıyı yazabiliriz:

$$0{,}115168 : 0{,}75 = 0{,}0823739 : \left(\frac{p}{3} - 2{,}75 \right).$$

Buna göre, $\frac{p}{3} - 2{,}75 = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}0823739}{0{,}115168}$, ifadesinden etkin faiz oranı için $\frac{p}{3} =$*%2,928* elde edilir, yani nominal dönem sonu faiz oranı p = *%8,784 p.a.(d)* olduğunu buluyoruz. Elde edilen bu değer öncekinden biraz farklıdır; bu ise tablodaki değerlerin yuvarlanmasından kaynaklanır. ♦

6. Hangi dönem başı faiz oranıyla 80 000 denar yarım yıllık faiz vadesi ile 2 yılda 120 000 denar olur.

Aranılan formülü,

$$K_n = K \left(\frac{100m}{100m - \pi} \right)^{nm},$$

kapitalin gelecekteki değeri formülünden doğrudan doğruya bulacağız. Denklemi bilinmeyen değer π'ye göre çözelim:

$$\frac{100m}{100m-\pi}=\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}},$$

ya da

$$100m-\pi=\frac{100m}{\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}}}.$$

elde edilir. Bu son eşitlikten dönem başı faiz için:

$$\pi=100m-100m\cdot\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\pi=100m\left(1-\sqrt[nm]{\frac{K}{K_n}}\right)$$

formülü elde edilir.

Konkre örnekte, $n=2$, $m=2$ olduğuna göre:

$$\pi=100\cdot 2\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{K}{K_2}}\right)=200\cdot\left(1-\sqrt[4]{\frac{80000}{120000}}\right)=200\cdot(1-0{,}9036)=\%19{,}28\ p.a.(a).$$

elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Bankaya yatırılan 8 000 denarın ne kadar zamanda gelecekteki değeri 55 000 denar olur; faizlenme dönemleri yarım yıllık ve faiz miktarı:

a) $p=\%8\ p.a.(d)$ b) $p=\%8\ p.a.(a)$.

2. Faiz dönemleri 3 aylık olmak üzere, %7 faiz oranıyla bankaya yatırdığımız 20000 denar kapital

a) dönem başı; b) dönem sonu;

faizlenme ile ne kadar zamanda banka hesabımızda 40 000 denar olacaktır?

3. Bankaya yatırılan 15 000 denar kapital 25 yılda 28 600 denar olmak için, üç aylık faiz dönemleriyle

a) dönem başı; b) dönem sonu

faizlenme, hangi yıllık faiz oranıyla yapılmalıdır?

4. Faiz vadesi yıllık olmak üzere, hangi dönem sonu faiz oranıyla 18 yılda anapara iki katına erişir? Ödevi *i / i* tablolarıyla da çözünüz.

5. Bugün bankaya 20 000 denar yatırdık, iki yıl sonra 10 000 denar hesaptan çekeceğiz. Faizlenme dönemleri 3 aylık olmak üzere bu günden dört yıl sonra hesabımızda 30 000 denar olursa, faizlenme hangi faiz oranıyla yapılmıştır? Dönem sonu ve dönem başı faizlenme yöntemlerini ayrı ayrı inceleyiniz.

6. 40 000 denar borç %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla dört eşit taksitle ödenmelidir. İlk taksit 4 yıl sonra, ikinci taksit 6, üçüncüsü 15 ve dördüncüsü 18 yıl sonra ödenecektir. Aynı faiz oranıyla ve yıllık faiz dönemleriyle tüm borç kaç yıl sonra birden ödenebilir?

7. Bir kişinin, bugün bankaya yatırdığı bir miktar parası 2 yıl ve altı ay sonra 40 000 denar olmuştur ve bundan 10 000 denar faiz miktarı elde etmiştir. Faizin hesaplanması yarım yıllık dönemlerle olduğuna göre, para hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

8*. Biri 25. doğum gününde bankaya 40 000 denar yatırmış ve 33. doğum gününde hesabında 76 800 denar olduğunu bankadan haber almıştır. Faizlenme dönemleri yarım yıllık olduğuna göre, para hangi faiz oranıyla bankaya yatırılmıştır?

9*. Bankaya 2 yıl önce 70 000 denar yatırılmış, bugün 20 000 denar hesaptan çekilmiştir. Bir yıl sonra bankaya daha 10 000 denar yatırılacaktır. Faiz oranı %10 *p.a(a)* yıllık faizlenme olduğuna göre ne kadar zaman sonra banka hesabımızda 100 000 denar olacaktır?

7.6. Konu Pekiştirme Alıştırmaları

1. Bugün bankaya 100 000 denar yatırıyoruz. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* ve faizlenme üç aylık dönemlerle olmak üzere 15 yıl 25 gün sonra hesabımızda kaç para olacaktır? Bunu bileşik faiz hesabıyla ve basit ve bileşik faiz kombinasyonu uygulayarak hesaplayınız.

2. 10.09.2000 tarihinde bankaya 12 000 denar yatırmıştık. Yıllık faizlenme vadesi, %10 *p.a.(a)* faiz oranıyla 31.12.2010 tarihinde hesabımızda ne kadar para birikecektir?

3. Yeni yıl ikramiyesi sayesinde, geçen yılın son gününde bankaya 60 000 denar para yatırdık. Üç yıldan sonra yıl sonunda hesabımdan 24 000 denar çekmeliyim, yatırımın ilk gününden beş yıl geçtikten sonra daha 40 000 denar yatıracağız. Faiz oranı %3 *p.s.(d),* faiz dönemleri üç ay olmak üzere, bu günden 8. yıl sonuna kadar banka hesabımızda kaç para birikecektir?

4. 120 000 denar borç üç eşit taksitle geriye çevrilecektir. Taksitlerden birincisi bir yıl sonra, ikincisi dört yıl sonra ve üçüncüsü altı yıl sonra ödenmelidir. Faiz oranı %10 *p.a.(d)*, yarım yıllık faizlenme dönemleriyle olmak üzere, 2yıl altı ay sonra borcun tümünü birden çevirmek için kaç para ödenmesi gerekir?

5. Bir kişi tasarruf yaptığı bankadan, bu günden itibaren 8 yılda ödeme koşuluyla 600 000 denar borç almak istemiştir. Bu gün 100 000 denar yatırıyor ve beş yıl sonra daha 200 000 denar yatıracak ve borcun kalanını varsa 10 yıl sonra ödeyecektir. Faiz oranı %8 *p.a.(d),* yarım yılık dönem faizlenmesiyle 10 yıl sonra borç ne kadar olacaktır?

6. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*, üç aylık faiz dönemleriyle faizlenen bir borç, 25 ay sonra 50 000 denar biriktiğine göre, borcun şimdiki değeri ne kadardır?

a) Sadece bileşik faiz hesabını kullanmakla;

b) son ay için, bileşik ve basit faiz hesapları karmasını uygulamakla.

Faiz miktarını da hesaplayınız.

7. Kaç yıl sonra 20 000 denar, yıllık faiz hesaplanması uygulayarak, %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 74669,12 denar olacaktır? Ödevi cebirsel şekilde ve *i / i* tablolarından yararlanmakla çözünüz.

8. %6,5 *p.a.(d)* faiz oranıyla, yarım yıllık faizlenme uygulayarak herhangi bir miktar para kaç yıl sonra üç katı kadar artacaktır? Aynı koşullar altında faizlenme dönem başı faiz oranıyla yapıldığında, zaman ne kadar değişecektir? Hem cebirsel hem de finansal tabloları kullanarak hesaplamayı yapınız.

9. Bankaya 15 yıl önce 10 000 denar, 8 yıl önce de 20 000 denar yatırılmıştır. Bugün daha kaç para yatırmalıyız ki 10 yıl sonra biriken para 100 000 denar olsun? Faiz oranı %4 *p.a.* yarım yıllık dönem sonu faizlenme uygulanacaktır.

10. Faiz oranı %6 *p.a.(a)*, yarım yıllık faiz hesaplaması uygulayarak hangi kapitalin 12 yıl ve 3 ayda getireceği faiz miktarı, aynı koşullar altında 50 000 denarın 30 yılda getireceği faiz miktarına eşit olacaktır?

11. Sattığı mal karşılığı bir kişiye 3 farklı teklif gelmiştir:

1) 40 000 denar peşin ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 120 000 denar 8 yıl 7 ay 20 gün sonra ödenecektir;

2) %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10,5 yıl sonra 200 000 denar ödenecektir;

3) 80 000 denar peşin ve %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla 100 000 denar 5 yıl ve 6 ay sonra ödenecektir;

Hangi teklif en uygun olduğunu hesaplayınız.

12. 100 000 denar para %5,4 *p.a.(d)* faiz oranıyla, 80 000 denar para ise %9,6 *p.a.(d)* faiz oranıyla bankaya yatırılmıştır. Faizlenme dönemleri 3 aylık olduğu durumda, ne zaman her iki kapitalin faiz miktarı aynı olacaktır? İkinci kapitale dönem başı faizlenme uygulanıyorsa faizlerin eşit olduğu zaman ne kadar değişecektir?

13. 80000 denar bir borç: 8 yıl sonra %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla, 40 000 denar 20 yıl sonra %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve 23 yıl sonra %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 20 000 denar ödenecektir. Faizlenme dönem sayısı yılda iki defa, yani yarım yıllık olduğuna göre, borç 25 yıl sonra birden ödendiği takdirde hangi faiz oranıyla ödenecektir?

14. Sınırlı sorumluluğu olan bir şirketin borçları:
- 5 yıl sonra ödenmesi gereken %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 50 000 denar;
- 8 yıl sonra ödenmesi gereken %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 80 000 denar;
- 12 yıl sonra ödenmesi gereken 8 *p.a.(d)* faiz oranıyla 40 000 denar.

Aynı zamanda 10 yıl sonra %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla 60 000 denar şirketin alacağı vardır. 15 yıl sonra %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yıllık faiz hesaplaması olmak üzere, ödenecek borcun denkleşmesi (saldosu) bileşik faiz hesabına göre ne kadardır?

15*. Bir kişi 34. doğum gününde bankada hesabına 18 000 denar para yatırmıştır. 38. doğum gününde de daha 12 000 denar ve 41. doğum gününde ise 24 000 denar hesabından çekmiştir. Faiz oranı %8 *p.q.(d)* üç aylık dönemli faizlenme ile kişinin 46. doğum gününde hesabında ne kadar parası olacaktır? Konform faiz oranını uygulayınız.

16. SİGA şirketi bir malı peşin ödemek koşuluyla 60 000 denara satmaktadır, GASİ şirketi ise, %5 *p.m.(d)* faiz oranıyla ve üç aylık dönemli faizlenme bazında 2 yıl sonra ödemek koşuluyla aynı malı 160 000 denara satmaktadır. Hangi teklif daha uygundur?

17*. 3 yıl önce bankaya 50 000 denar yatırdık, bir yıl sonra hesaptan 10 000 denar çekmeliyiz, 3 yıl sonra daha 20 000 denar hesabımızdan çekeceğiz. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*, yarım yıllık faizlenme vadesiyle ne kadar zamandan sonra banka hesabımızda 600 000 denar olacaktır?

18. 2 yıl önce banka hesabımıza 80 000 denar yatırdık, 3 yıl sonra ise 32 000 denar hesaptan çekeceğiz. Yıllık faizlenme dönemleriyle %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 7 yıl sonra toplam ne kadar faiz miktarı elde edilecektir?

19. İki yıl üç ay önce bankaya yatırılan para bu güne kadar elde edilen faiziyle beraber 20 000 denardır. Bu arada hesaplanan faiz miktarı 5 000 denardır. Faizin hesaplanması üç aylık dönem vadeli yapıldığına göre, hangi dönem sonu faiz oranıyla hesaplanmıştır? Dönem başı faizlenme yapıldığı durumda faiz oranlarındaki fark ne kadardır?

20*. Banka hesabına bir yıl ve 2 ay önce 12 000 denar yatırılmış, iki yıl üç ay sonra ise hesaptan 20 000 denar çekilmiş ve banka hesabında para kalmamıştır (saldo 0).

Faizlenme yarım yıllık dönem vadeli yapıldığına göre, faiz hangi dönem sonu faiz oranıyla hesaplanmıştır?

21*. Bugün, iki farklı bankada iki eşit miktar para yatırılmıştır. Birinde faiz oranı %16 *p.a.(d)*, diğerinde ise %10 *p.a.(d)*'dir. Kaç yıl sonra birinci bankada biriken para, ikinci bankada biriken paradan iki defa daha çok olacaktır? Faiz hesaplaması yarım yıllık vadeli, bu zaman esnasında faizlerin farkı 33 200 denar olduğuna göre, yatırılan para miktarı ne kadarmış?

KONU ÖZETLERİ

Bir kapitalin faizinin hesaplanması **basit** ve **bileşik** olabilir. **Basit faiz**, bir yatırımın, yatırım vadesi süresince sadece anaparasının kazandığı faiz oranıdır. Yatırılan miktar para her dönemde değişir, yani her dönem sonunda elde edilen faiz miktarı anaparaya eklemekle yatırım miktarı büyür ve gelecek dönemde aynısı anapara eklenirse **bileşik faizden** söz edilir, yani: bir yatırımın yatırım vadesi boyunca kazandığı faizin de yeni yatırım vadesinde yatırıma tabi tutulması sonucu elde edilen getiriyi gösteren faizdir. Diğer bir deyişle **faizin de faiz kazanmasıdır.**

Bileşik faiz, yılda bir defa, iki defa ya da birçok defa hesaplanabilir. Faizin hesaplandığı zaman aralığına **faiz hesaplama vadesi** denir.

Basit faiz hesaplamasında dört temel büyüklük şunlardır:

- K - anapara (temel kapital başlangıç miktar)
- i - faiz miktarı
- p – faiz oranı (yüzde olarak), 100 denar paranın zaman biriminde getirdiği faiz.
- t - paranın faizde kaldığı süre – yıl olarak, ya da daha küçük ölçü biriminde de olabilir.
- m – bir yıl içerisinde faiz hesaplaması, daha doğrusu, bir yıldaki faiz hesaplama dönemlerin sayısı.

Faizin yıllık hesaplanması (*a*) ile, yarım yıllık hesaplanması (sömestreli) (*s*) ile, üç ayda bir hesaplamayı (kvartal) (*q*) ile, ayda bir vadesi (*m*) ile ve adı geçen her dönemlik hesaplamalarda faiz oranı yıl bazında sayılmaktadır.

Faiz oranı, yıllık faiz oranı gibi verildiğinde *p.a.* biçiminde işaret yazılır, yarım yıllık faiz oranı olarak alınırsa *p.s.* işareti yazılır. Üç aylık bazında da faiz oranı verilebilir ve bu durumda *p.q.* biçiminde ya da aylık bazında olursa *p.m.* işareti yazılır. Bu şekilde verilmiş olan faiz oranına **nominal faiz oranı** denir.

Ancak finansman ya da yatırımlarla ilgili kararlarda dönem uzunluğu yıl olduğu kadar yıldan daha kısa süreli olabilir. Bu gibi durumlarda yıllık olarak verilen faiz oranından **etkin faiz oranı (rölatif faiz oranı)** bulunarak işlem yapılmalıdır. Etkin faiz oranını, yıllık nominal faiz oranının (cari faiz ya da piyasa faiz oranı da denilen) yıl içindeki dönem sayısına bölünmesiyle bulunur.

Her dönem sonunda faiz hesaplanarak anaparaya katılırsa **dönem sonu faizlenme** söz konusu olur; böyle durumda faiz oranı *p.a.(d)* ile işaret edilir. Dönem sonu faizlenmenin faiz hesaplaması başlangıçta yatırılan anaparaya uygulanmaktadır.

Faizlenme her dönem başlangıcında yapılırsa, dönem başı faizin hesaplanması için temel değer, dönem sonunda elde edilen anaparadır; bu işleme **dönem başı (antisipatif) faizlenme** denir ve *p.a.(a)* ile işaret edilir.

Tüm faiz vadesinde elde edilen faiz miktarını temel değere katmakla elde edilen birikmiş değere, kapitalin **gelecekteki değeri** denir. Faizlenmesi yapılan temel değerin başlangıç miktarına K'nın **şimdiki değeri** de denir.

Dönem sonu faizlenme oranı p, bir yılda faiz dönem sayısı m ve $\boxed{r = 1 + \frac{p}{100m}}$ dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere K kapitalinin gelecekteki değeri $\boxed{K_n = Kr^{nm}}$ formülüyle hesaplanır.

Peşin (antisipatif) faizlenmede, faiz opranı π, bir yılda faiz dönem sayısı m ve $\boxed{\rho = \frac{100m}{100m - \pi}}$ dönem başı faiz katsayısı olmak üzere K kapitalinin gelecekteki değeri $\boxed{K_n = K\rho^{nm}}$ formülüyle hesaplanır.

Faiz ister yıllık hesaplamayla, ister yılda birkaç devreden faizin hesaplanmasıyla aynı faiz miktarını veren faiz oranına **konform faiz oranını** denir ve $p_{k,m}$ ile işaret edilir. Bir yılda m defa faizlenme ile ve yılda bir defa faiz oranı p olmak üzere yapılan faizlenme ile aynı faiz miktarı veren **konform faiz oranı** şu formül ile hesaplanır:

$$\boxed{p_{k,m} = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)}.$$

Verilen K kapitalin gelecekteki değeri K_n bilindiğinde, **temel değeri** şu formüllerle hesaplanır:

$$\boxed{K = K_n r^{-nm} = \frac{K_n}{(1 + \frac{p}{100m})^{nm}}}$$ dönem sonu faizlenme için ve

$$\boxed{K = K_n \rho^{-nm} = K_n \left(1 - \frac{\pi}{100m} \right)^{nm}}$$ peşin (antisipatif) faizlenme için.

Biriken paranın başlangıç değerini bulma işlemine, **iskontolama,** ya da biriken değerin başlangıç değerini belirtme denir. Faiz oranlarının çarpımsal ters r^{-nm} ve ρ^{-nm} değerlerine **iskonto katsayıları (faktörleri)** denir.

Faiz oranı p ve yıl içindeki faiz dönem sayısı m olan dönem sonu faizlenmede r dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere, **faiz miktarı** şu formül kullanılır:

$$\boxed{I_n = K\left(r^{nm} - 1\right)},$$

Peşin (antisipatif) faizlenme durumunda faiz oranı π ve yıl içindeki faiz dönem sayısı *m,* dönem başı faiz katsayısıdır ρ olmak üzere faiz miktarı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{I_n = K\left(\rho^{nm} - 1\right)},$$

Faizlenme dönem sonu, %p *p.a.(d)* faiz oranıyla, yıl içindeki dönem sayısı m ve $r = 1 + \dfrac{p}{100m}$ dönem sonu faiz katsayısı olmak üzere **faiz süresi** şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log r} \log \frac{K_n}{K}}$$

Benzer şekilde, faizlenme dönem başı (antisipatif) olduğu durumda, faiz oranı %π *p.a.(a)*, yıl içindeki faiz dönem sayısı m olduğunu varsayarak şu formül kullanılır:

$$\boxed{n = \frac{1}{m \log \rho} \log \frac{K_n}{K}}.$$

Yıl içindeki faiz dönem sayısı m, faiz süresi n yıl olduğunu farz ederek yıllık dönem sonu faiz katsayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{p = 100m \cdot \left(\sqrt[nm]{\frac{K_n}{K}} - 1\right)}$$

8. PERİYODİK YATIRIMLAR (MEVDUATLAR) VE PERİYODİK ALACAKLAR (KİRALAR)

8.1. Periyodik Yatırımlar

Basit ve bileşik faiz hesaplarını uyguladığımız örneklerde, belli miktarda parasal varlıkların sadece bir defa yatırıldığı, ya da farklı dönemlerde yatırılan veya istenildiğinde hesaptan çekilen miktarları incelemiştik. Bu durumda, yatırımların bazıları eşit, bazıları ise farklı, belli bir kurala göre değişebilen, örneğin aritmetik ya da geometrik diziler özelliğine göre artan ya da azalan veya tasarrufta olduğu gibi önceden belli bir kurala göre uymayan yatırımlar olabilir. Halbuki çok kez, eşit zaman aralıklarında yatırımların tekrarlandığına rastlıyoruz. Böyle durumlarda söz konusu **mevduattır.** Mevduat belli bir süre sonunda veya istenildiğinde çekilmek üzere bankalara faizle yatırılan paradır. Mevduatlar belli sürelerde aynı miktarlarda yatırıldığı durumda sabit mevduatlar diye de adlandırılıyorlar.

Yatırımlar, ödemeler serisinin başlama noktasına göre **dönem başı (antisipatif)** ve **dönem sonu (dekurzif) mevduatlar** olarak ikiye ayrılıyorlar. Yatırım esnasında her mevduatın faizi, yatırıldığı günden tüm mevduatların toplam değerinin hesaplandığı ana kadar hesaplanır. Dönem başı ya da dönem sonu faizlendirme uygulanabilir. Mevduat vadesi ve faiz vadesi bazı durumlarda aynı, bazı durumlarda ise farklı, yani mevduat vadelerinden daha sık ya da daha seyrek olabilirler. Pek sık tüm mevduatların toplam değeri ne kadardır, sorusu sorulmaktadır. Yatırım esnasında faizi hesaplanmış tüm mevduatların toplamına yatırımın **gelecekteki değeri** denir.

Şimdi, sadece yatırım dönemleri faiz vadeleriyle denk gelen sabit (değişmeyen) bireysel periyodik yatırımları inceleyeceğiz.

Yıl esnasında sadece bir mevduat ödendiği durumda, söz konusu **yıllık mevduat** olur, yatırım yılda iki defa yapıldığında, **altı aylık (yarım yıllık) mevduat**, yılda dört defa yatırım yapıldığında **üç aylık (çeyrek yıllık) mevduat** biçiminde adlandırılır. Yatırım ayda bir yapılırsa **aylık mevduat** olur. Burada da faizlendirme vadesi yıllık, altı aylık, üç aylık vb. olabilir.

Alıştırmalar

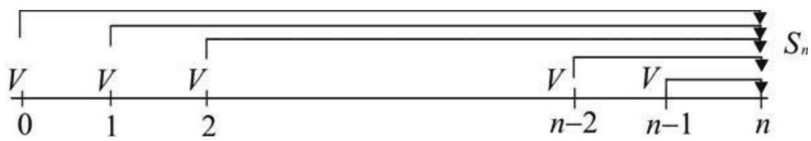
1. Mevduat nedir? Mevduatın temel özellikleri nedir?
2. Faizinin hesaplanmasına göre mevduatlar nasıl olabilir?
3. Yatırım sayısına göre nasıl mevduatlar fark edebiliriz?

4. Yatırım süresine göre nasıl mevduatlar fark edebiliriz ?

5. Mevduatların gelecekteki değeri nedir?

8.2. Mevduatların Gelecekteki Değerini Hesaplamak

Her bireysel mevduatın değeri V olsun. Bireysel mevduat sayısı n, faiz oranı dönem sonu uygulanan %p olsun. Faiz vadesi, yatırım vadesiyle aynıdır. Mevduatın ödenmesi dönem başı olsun (her vadenin başlangıcında ödeme yapılsın). Vade sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{p}{100}$ olduğunu biliyoruz. Her bireysel mevduat için bileşik faiz hesabını uygulayarak faiz miktarını bulmakla, mevduatların gelecekteki değerini elde edeceğiz. Şek.1'de yatırımlar ve faizlendirmeler gösterilmiştir.



Şek. 1

Birinci vadenin başında yatırılan birinci mevduat, n – vade için, karşılık gelen r faiz katsayısıyla son vadenin sonuna kadar süre için faizi hesaplanır ve değeri Vr^n'dir. Yatırılan ikinci miktar V, aynı şekilde $n - 1$ vade için son vadenin sonuna kadar faizi hesaplanır ve değeri Vr^{n-1}'dir. Bu şekilde kalan tüm bireysel yatırımların faizleri hesaplanır. Sondan ikinci olan yatırım $n - 2$ zamanına denk gelir ve iki vade için faizlenir ve değeri Vr^2'dir, son yatırım ise sadece bir vade için faizlenir ve değeri Vr'dir. Faiz döneminin sonuna kadar faizleri hesaplanmış olan tüm dönem başı yatırımların toplamı:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + Vr = V\,(r^n + r^{n-1} + \ldots + r^2 + r\,) = Vr\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1).$$

olduğunu buluyoruz. Parantez içindeki ifade ilk terimi r olan n terimli bir geometrik dizisinin toplamıdır. Geometrik dizilerin ilk n terim toplamı formülünden yararlanarak, yatırımların dönem başı faizlendirme ile dönem başı yatırımların toplamı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Not 1. Faizin faizi $i\,/\,i$ tablolarında, bir para birimi bazında dönem sonu yatırımların toplamını ifade eden $r\frac{r^n - 1}{r - 1}$ ifadesinin değeri III_p^n işareti altındaki cetvelde verilmiştir. Demek ki, üçüncü tablodaki değerler için $III_p^n = r\frac{r^n-1}{r-1}$'dir. Bu ifade i / i tablosunda, aynı faiz oranında 1'den n'e kadar vadelerin I_p^k değerlerini toplamakla elde edilir, yani $III_p^n = I_p^1 + I_p^2 + \dots + I_p^n$ dir. Burada, yatırımlar n yılda %p *p.a.(d)* faiz oranıyla yapılmıştır. Buna göre, dönem başı faizlenen yatırımların toplamı:

$$\boxed{S_n = V \cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

formülüyle ifade edilir.

Not 2. Her bireysel vade için faiz oranı dönem başı olarak verilirse, ρ dönem başı faiz katsayısını kullanacağız. Böyle durumda dönem başı faizlenen yatırımların toplamı

$$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n-1}{\rho-1}},$$

formülüyle ifade edilecektir. Burada $\rho = \frac{100}{100-\pi}$ dönem başı faiz katsayısıdır. Böylece üçüncü i / i tablosundan yararlanarak, π dönem başı faiz oranı olmak üzere $S_n = V \cdot III_\pi^n$ formülü elde edilir.

Ödevlerin çoğunda yatırımların toplam sayısı değil de, yıl bazında yatırım sayısı ve yatırımın zaman aralığı (vadesi) verilmiş olabilir. Örneğin, n yıl boyunca, yılda m defa yatırım yapılıyor. Böyle durumda yatırımların toplam sayısı $n \cdot m$ çarpımına eşittir.

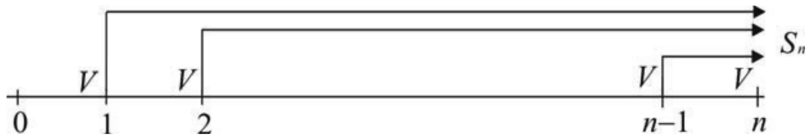
1. Bugünden başlayarak gelecek iki yıl esnasında, her üç ayın başlangıcında 5 000'er denar yatırmaya başlıyoruz. Faiz oranı %10 *p.a.(d)* üç aylık vadeli olmak üzere, ikinci yılın sonunda toplam ne kadar paramız olacaktır?

Her bireysel yatırımın değeri V_{aq} = 5 000 denardır. Yatırımların sayısı, her yıl dörder mevduat $n = 2 \cdot 4 = 8$, dönem sonu faiz katsayısı ise, üç aylık vadeli faizlendirme ile hesaplanacaktır. Buna göre, faiz oranı $\frac{10}{4} = \%2,5$ *p.q.(d)*'dir (çeyrek yıllık faiz oranı). O halde $r = 1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$ olduğunu buluyoruz. Dönem başı yatırımların gelecekteki değeri:

$$S_n = Vr\frac{r^n-1}{r-1} = 5000 \cdot 1,025 \cdot \frac{1,025^8-1}{1,025-1} = 44773$$

olduğunu buluyoruz. ♦

Başlangıçta verilen tüm koşullar geçerli olsun, her yatırımın değeri V, mevduat (yatırım) sayısı n, faiz oranı dönem sonu % p ve faizlendirme vadesi, yatırımların vadesiyle aynı olsun.



Şek. 2

Dönem sonu faiz katsayısı r olsun ve yatırımlar her periyodun sonunda olsun, yani yatırımlar dönem sonu olsun. Şek. 2'de görüldüğü gibi, son yatırımın faizi hesaplanmaz, sondan birincisi bir defa faizlenir, ikincisi iki defa ve geriye doğru sayarken ikinci yatırım $n-2$ defa ve ilk yatırım $n-1$ defa faizlenir. Bunlara karşılık gelen faizlenmiş miktarlar sırasıyla V, Vr, Vr^2 ,..., Vr^{n-2}, Vr^{n-1}'dir. Faizlenmiş yatırımların toplamı (gelecekteki değer) için:

$$S_n = V + Vr + Vr^2 + ... + Vr^{n-2} + Vr^{n-1} = V(1 + r + r^2 + ... + r^{n-2} + r^{n-1})$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizisinin n teriminin toplamı olduğuna göre, dönem sonu yatırımların gelecekteki değeri için şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

Not 3. $\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ ifadesini $i\,/\,i$ tablolarında $\left(1 + III_p^{n-1}\right)$ biçiminde bulunabilir. Demek ki, dönem sonu faizlenen yatırımların toplamını hesaplamak için formül:

$$\boxed{S_n = V \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}.$$

şeklinde yazılabilir.

Not 4. Dönem başı faizlendirme uygulandığı durumda, yatırımların gelecekteki toplam değeri için formül:

$$\boxed{S_n = V\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}},$$

şeklinde ifade edilir. Burada ρ dönem başı faiz katsayısı, $\rho = \dfrac{100}{100 - \pi}$ dir. Üçüncü $i\,/\,i$ tablolarından yararlanmakla dönem sonu faizlenmiş dönem sonu yatırımların gelecekteki toplam değeri için formül:

$$\boxed{S_n = V \cdot \left(1 + \mathrm{III}_\pi^{n-1}\right)}.$$ dir.

2. Bankaya her yıl sonunda dört yıl boyunca 10 000 denar yatırılıyor. Yıllık vadeli faiz oranı %6 *p.a.(d)* olduğuna göre, dördüncü yıl sonunda yatırımın gelecekteki değeri ne kadardır?

Ödevin koşullarına göre, V_{da} = 10000 denar, n = 4, r = 1,06'dır. Vade sonu yatırımların gelecekteki değeri için:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 10000 \cdot \frac{1{,}06^4 - 1}{1{,}06 - 1} = 43746 \text{ denar elde edilir.} \blacklozenge$$

Dönem sonu faizlenmiş dönem başı yatırımların gelecekteki değeri, aynı koşullar altında, dönem sonu faizlenmiş dönem sonu yatırımların gelecekteki değerinden *r* kat daha büyük olduğunu fark edebiliriz, yani

$$S_n^{\ a} = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1} = r \cdot S_n^{\ d},$$

dir; Faizlendirme dönem başı olduğu durumda ise $S_n^{\ a} = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = \rho \cdot S_n^{\ d}$'dir. Demek ki dönem başı yatırımlar, dönem başı faizlendirme ile elde edilen gelecekteki değer, aynı yatırım koşullarıyla, dönem sonu yatırımların dönem başı faizlendirme ile elde edilen gelecekteki değerin ρ katıdır.

(Daha kısa olarak, dönem başı yatırımların gelecekteki değerini S_n^a ile, dönem sonu yatırımların gelecekteki değerini ise S_n^d ile işaret edeceğiz).

3. Bir kişi, bir buçuk yıl esnasında her ay sonunda 3 000'er denar para yatırıyor. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* aylık vadeli hesaplama ile, yatırdığı paranın gelecekteki değeri ne kadar olacaktır.

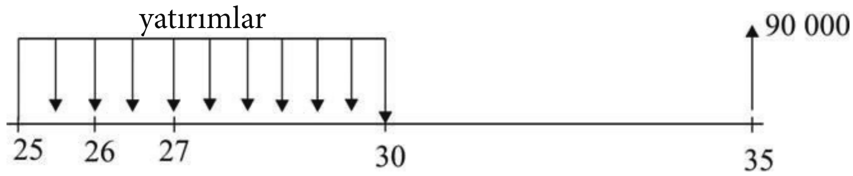
Ödevin koşullarına göre, V_{dm} = 3000 denar, p = %6 *p.a.(d)*'dir. Yatırımların toplam sayısı n = 12 -1,5 = 18 (yılda 12 mevduat), aylık faizlendirmeye karşılık gelen faiz oranı $\%\frac{6}{12}$, yani %0,5 *p.m.(d).* Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005$'dir.

Dönem sonu yatırımların gelecekteki değeri:

$$S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \frac{1{,}005^{18} - 1}{1{,}005 - 1} = 56357 \text{ denar olduğunu buluyoruz.} \blacklozenge$$

4. Bir kişi 25. doğum gününden başlayarak 30. doğum gününe kadar her altı ay sonunda 8000'er denar banka hesabına yatırıyor. 35. doğum gününde hesabından 90000 denar çekmesi gerekiyormuş. Faiz oranı p = %8 *p.a.(d)* altı aylık faiz vadesiyle hesabında gereken para birikecek mi?

Kişi, 5 yıl boyunca dönem sonu V_{ds} = 8 000 denar yatırımlar yapıyor. 30. doğum gününde yatırımın gelecekteki değeri daha 5 yıl faizde kalıyor (şek. 3). Soru şudur: 35. doğum gününde hesabında biriken para 90 000 denardan büyük ya da eşit olacak mı, yani $S_n \cdot r^{10} - 90000 \geq 0$ mıdır? Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1{,}04$ ve yatırımların toplam sayısı $n = 10$'dur.



Şek 3

Buna göre,

$$V\frac{r^{10}-1}{r-1}\cdot r^{10}-90000=8000\cdot\frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04-1}\cdot 1{,}04^{10}-90000=6049$$

denar olduğunu buluyoruz. Demek ki, 90 000 denar parasını çekmek için yatırımcının hesabında gereken parası varmış.

Alıştırmalar

1. Bir yatırımcı her yarıyıl başında 16 yıl boyunca 5 000 denar

a) yarıyıllık faiz vadeli %4 *p.a. (d)*;

b) yarıyıllık faiz vadeli %4 *p.a. (a)*

faiz üzerinden yatırırsa 16 yılın sonundaki yatırım tutarı (gelecekteki değeri) ne kadar olur?

2. Her yılın sonunda 10 yıl boyunca, yıllık faiz vadeli %4 *p.a.(d)* faiz üzerinden 10 000 denar yatırıyoruz. Son yatırım gününde yatırımların tutarını hesaplayınız.

3. Her yarıyıl sonunda 12 yıl boyunca, altı aylık faiz vadeli %8 *p.a.(d)* faiz üzerinden 1000 denar yatırılıyor. Yatırımlar

a) dönem sonu; b) dönem başı

olduğuna göre, yatırımın gelecekteki tutarını hesaplayınız.

4. Her ay sonunda 8 yıl boyunca 3000 denar mevduat,

a) aylık faiz vadeli % 12 *p.a.(d)*;

b) aylık faiz vadeli % 12 *p.a.(a)*;

faiz üzerinden yatırılıyor. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplayınız.

5. Ödev 4'teki koşullar altında fakat mevduatlar dönem başı olduğu durumda yatırımın gelecekteki değerini hesaplayınız. Elde edilen değerleri kıyaslayınız. Hangi mevduat şekli ve hangi faiz oranı üzerinde yatırımların en büyük gelecekteki değeri elde edilecektir?

8.3. Bireysel Mevduatın Değerini Hesaplamak

Faiz oranı %p $p.a.(d)$, mevduatların gelecekteki değeri (tutarı) S_n ve yatırım süresi verilmiş olsun. Sabit mevduatın tutarını hesaplamak için, Dönem başı mevduatın gelecekteki değeri $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$ formülünden V mevduatı için

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r(r^n - 1)}}.$$

elde edilir.

1. Beş yıllık yatırım sonunda, yatırımların tutarı 40 000 denar olmuştur. Her yıl başlangıcında yıllık vadeli %6 $p.a.(d)$ faizi üzerinden yatırılan mevduat ne kadardır?

Burada, $r = 1{,}06$ dönem sonu faiz katsayılı dönem başı mevduat söz konusudur. Toplam $n = 5$ mevduat yatırılmış ve yatırılan miktarların tutarı $S_n = 40\,000$ denardır. Hesaplanması gereken, bireysel yıllık faiz vadeli mevduat tutarıdır. Örneğimizde verilen değerleri formülde yerine değiştirmekle, $V_a = 40000\frac{1{,}06 - 1}{1{,}06 \cdot (1{,}06^5 - 1)} = 6694$ denar elde edilir. ♦

%p, $p.a.(d)$ faiz oranı, mevduatların gelecekteki tutarı S_n ve yatırım süresi bilindiği durumda, sabit mevduatın hesaplanması için, dönem sonu vadeli mevzuatın gelecekteki tutarı $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$ formülünden V için şu formül elde edilir:

$$\boxed{V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1}}.$$

Not.1. Faiz hesaplanması dönem başı olduğu durumda, bireysel mevduatların karşılıklı değerleri şu formüllerle hesaplanacaktır:

dönem başı mevduatlar için

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho-1}{\rho(\rho^n - 1)}},$$

dönem sonu mevduatlar için

$$\boxed{V = S_n \frac{\rho-1}{\rho^n - 1}}.$$

2. Beş yıl sonra 120 000 denara ihtiyacımız olacaktır. Her yarıyıl sonunda 5 yıl boyunca ne kadar mevduat yatırmalıyız? Faiz oranı %5 $p.a.(d)$ yarıyıl vadelidir.

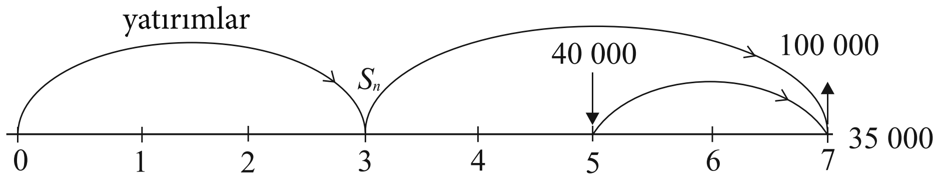
Yatırımlar sayısı $n = 10$, $S_n = 120\,000$ denar, dönem sonu faiz katsayısı ise $r = 1 + \frac{5}{2 \cdot 100} = 1,025$'tir. O halde,

$$V = S_n \frac{r-1}{r^n - 1} = 120000 \cdot \frac{1,025-1}{1,025^{10}-1} = 10714$$

denar olduğunu buluyoruz. ♦

3. İlerdeki üç yıl boyunca, her üç ay başında üç aylık mevduatlar ödenecektir. Bu günden beş yıl sonra sadece bir defa mahsus 40 000 denar yatırılacaktır. Yedi yıl sonra hesabımızdan 100000 denar çekmeliyiz. Üç aylık vadeli faiz oranı %8 *p.a.(d)* olduğuna göre, bireysel mevduat ne kadar olmalıdır ki, bu günden yedi yıl sonra hesabımızda 35000 denar olsun?

Yatırımları ve çekilen miktarı zaman ekseninde gösterelim (şek.4).



Şek. 4

Mevduatların toplam gelecekteki değeri hesaplandıktan sonra bu miktar daha dört yıl faizde kalır. Yatırılan 40 000 denar da 2 yıl faizde kalır. Çekilen 100 000 denardan sonra şu denklem elde edilir:

$$S_n \cdot r^{4 \cdot 4} + 40000 \cdot r^{2 \cdot 4} - 100000 = 35000 .$$

Son denklem, bu günden gelecekteki yedi yıl süresinde yapılacak işlemleri göstermektedir. Bu durumda dönem başı yatırımların gelecekteki değerini hesaplayan $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r-1}$ formülünde $n = 12$, dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1,025$'tir. Üç aylık etkin faiz oranı %2'dir. S_n tutarı 16 defa faizlenir, 40 000 denar ise 8 defa faizlenecektir. O halde

$$V \cdot 1,02 \cdot \frac{1,02^{12} - 1}{1,02 - 1} \cdot 1,02^{16} + 40000 \cdot 1,02^{8} = 135000$$

$$V \cdot 18,78 + 46866 = 135000$$

elde edilir. Buna göre mevduatın değeri $V_{aq} = 4693$ denardır. ♦

Not 2. İncelenen son örnekteki ödevlere benzer ödevleri çözerken yukarıda yapıldığı gibi, yatırımları zaman ekseninde göstermekle, faizlendirme periyotlarını daha kolay hesaplayabilirsiniz.

Alıştırmalar

1. Dönem sonu altı aylık vadeli mevduatların 7 yıl boyunca yatırılmasıyla 300 000 denar tutar elde edilmiştir. Faiz oranı:

a) altı aylık vadeli %4 *p.a.(d);*

b) altı aylık vadeli %4 *p.a.(a);*

olduğuna göre bireysel mevduatın değeri ne kadardır?

2. Dönem başı yıllık vadeli mevduatların 6 yıl boyunca %5 *p.a.(d)* faiz üzerinden yatırılmasıyla hesabımızda 71 420 denar olmasını istersek, bireysel mevduat ne kadar olmalıdır? Faiz vadesi yıllıktır.

3. Bir kişi banka hesabına 25. doğum gününden 40. doğum gününe kadar, dönem sonu üç aylık vadeli sabit olmak üzere ne kadar para yatırmalıdır ki, banka hesabında 50. doğum gününde 500 000 denarı olsun? Faiz oranı üç aylık vadeli %6 *p.a.(d)*'dir.

4. Bir kişi 2 yıl altı ay boyunca, sabit değerli üç aylık dönem başı mevduatlar yatırıp dönem sonunda hesabında 50 000 denar parası olmuştur. Üç aylık vadeli %6 *p.a.(d)* faiz üzerinden yatırılan bu mevduatların bireysel değeri ne kadardır?

5*. Bir kişi 35 yaşından 40 yaşına kadar, vade sonu altı aylık mevduatları bankaya yatırıyor. 43 yaşının sonunda 16 000 denar hesaptan kaldırmak ve 47 yaşının sonunda hesabında 120 000 denar olmasını isterse, kişi hesabına ne kadar para yatırmıştır? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve faizlendirme altı aylıktır.

8.4. Mevduat Sayısını ve Son Mevduatın Hesaplanması

Mevduatın gelecekteki değerini (tutarını) hesaplamak için kullandığımız $S_n = Vr\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ dönem başı mevduatlara ait ve $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ dönem sonu mevduatlara ait formüller gereğince, gelecekteki değer tutarı, bireysel mevduat değeri ve faiz oranı bilindiğinde, yatırımların sayısı n hesaplanabilir. Dönem başı mevduatlar için

$$\frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{S_n}{Vr}$$

$$r^n - 1 = \frac{S_n(r-1)}{Vr},$$

geçerlidir. Oradan da

$$r^n = \frac{S_n(r-1)}{Vr} + 1.$$

elde edilir.

Yatırımların sayısı n sadece logaritma işlemiyle belirtilebilir. Logaritma işleminin temel özelliklerinden yararlanarak:

$$\log r^n = \log\left(1+\frac{S_n(r-1)}{Vr}\right)$$

$$n\cdot\log r = \log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}$$

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Vr+S_n(r-1)}{Vr}}.$$

elde edilir. Daha kolay hesaplama yapmak için, yatırımların gelecekteki değeri formülünde, verilen değerlerin değiştirilmesinden sonra elde edilen ifadenin logaritması alınır.

Benzer şekilde dönem sonu mevduatlar için

$$\boxed{n=\frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{V+S_n(r-1)}{V}}.$$

formülü elde edilir.

Not 1. Dönem başı faiz oranı için hesaplamalar, dönem başı mevduatların gelecekteki değerine karşılık gelen formüllere yapılır.

1. Her yılın başında %6 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz üzerinden 10 000 denar kaç defa yatırılmalıdır ki hesabımızda 46 371 denar olsun?

Mevduatlar dönem başıdır. Dönem sonu faiz katsayısı $r=1+\frac{6}{100}=1,06$'dır. O halde,

$$1,06^n=\frac{46371(1,06-1)}{10000\cdot 1,06}+1=1,26248\,.$$

elde edilir. Bu ifadenin 10 tabanına göre logaritmini alırsak $n\cdot\log 1,06=\log 1,26248$ ve oradan $n=4$ elde edilir. Demek ki dört yıl, yani dört defa yatırım yapmalıyız. ♦

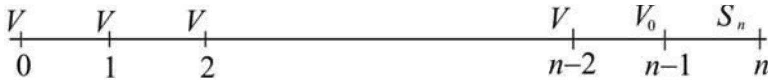
2. 35 000 denarlık mevduatlar %6 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme üzerinde her yarımyılda yatırılıyor. Yatırımların gelecekteki değeri son mevduatın ödendiği günde 401651 denar olmasını istersek, kaç mevduat ödenmelidir?

Şunu fark edelim, gelecekteki değer son yatırım yapıldığı günde hesaplandığı takdirde yatırımlar dönem sonudur. Etkin faiz oranı %3 olduğuna göre $r=1,03$'tür. Buna göre, $401651=35000\cdot\frac{1,03^n-1}{1,03-1}$, buradan da $1,03^n=1,34427$ ve sonunda $n=10$ elde edilir. Demek ki, 10 mevduat ödenmelidir. ♦

3. Yatırımlar dönem sonu 3 aylık vadeli, faiz oranı %8 *p.a.(d)* üç aylık faizlendirme vadeli 10 000 denarlık kaç mevduat yatırılmalıdır ki, gelecekteki değeri 137200 denar olsun?

Dönem sonu mevduat $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1,02$ için $137200 = 10000 \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ geçerlidir. O halde, $1,02^n = 1,2744$ ve oradan $n \approx 12$ elde edilir. Cevap tam 12 olsaydı, tam 12 mevduat, yani 3 yıl 4 er mevduat gerekecekti, halbuki elde edilen değer yaklaşıktır. Onun tam değeri $n = 12,2446$'dır. Bu demektir ki, istenilen para tutarını elde etmek için mevduat sayısı 12 den fazla olacaktır. Bu durumda, 12 mevduat bilinen 10 000 denarlık ve 13. mevduatın değeri diğerlerinden küçük olacaktır. **Son mevduat**, diğerlerinden farklıdır ve ona **mevduatın kalanı** denir. ♦

Son mevduatın hesaplanması için bir formül bulalım. Mevduat sayısı toplam n olsun ve bunlardan n -1 tanesinin değeri aynı V, son mevduatın değeri $V_0 \neq V$ olsun. Zaman ekseninde dönem başı mevduatların durumunu gösterelim (şek.5).



Şek. 5

Vade sonu faiz katsayısı r için:

$$S_n = Vr^n + Vr^{n-1} + \ldots + Vr^2 + V_0 r \,,$$

$$S_n = Vr^2\left(r^{n-2} + \ldots + r + 1\right) + V_0 r \,.$$

buradan da

$$S_n = Vr^2 \frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} + V_0 r \,,$$

elde edilir

$$\boxed{V_0 = \frac{S_n}{r} - Vr\frac{r^{n-1} - 1}{r - 1} = \frac{1}{r} S_n - V\frac{r^n - r}{r - 1}}.$$

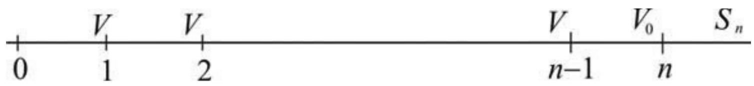
Not 2. i / i tablolarından yararlanıyorsak $\dfrac{1}{r}$ ifadesi, II_p^1 tablosunda verilmiş olan iskonto katsayısına karşılık gelir, $\dfrac{r^n - r}{r - 1}$ ifadesi ise tam III_p^{n-1} dir. Buna göre son mevduat

$$\boxed{V_0 = S_n \cdot \mathrm{II}_p^1 - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

şeklinde yazılabilir.

Not 3. Yatırımların sayısını belirtirken, n doğal sayı olmadığı durumda, n için hesaplamada elde edilen sayıdan ilk büyük olan tam sayı alınır. Böyle durumda $V_0 < V$, $n - 1$ mevduatın değeri V'dir, sonuncunun ise V_0'dır.

Vade sonu mevduatlarda ise, zaman ekseni şek. 6'da gösterilmiştir.



Şek. 6

Böyle durumda

$S_n = Vr^{n-1} + Vr^{n-2} + \ldots + Vr + V_0$

dir. Eşitliği V_0 a göre düzenleyerek, geometrik dizisinin ilk n – terim toplamı formülünden yararlanmakla:

$$\boxed{V_0 = S_n - Vr\frac{r^{n-1}-1}{r-1} = S_n - V\frac{r^n - r}{r-1}}.$$

elde edilir.

Not. 4. i / i tablolarından yararlanarak

$$\boxed{V_0 = S_n - V \cdot \mathrm{III}_p^{n-1}}.$$

formülünü yazabiliriz. Bu formül, dönem sonu yatırımlarda diğerlerinden farklı olan son mevduatın değerini hesaplamak için kullanılır.

Not 5. Faiz hesaplanması dönem başı olduğu durumda, son mevduat için şu formül elde edilir:

dönem başı yatırımlar için

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{\rho}S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}},$$

ve dönem sonu yatırımlar için

$$\boxed{V_0 = S_n - V\frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}.$$

4. Yarım yıllık vadeli, faiz oranı %10 *p.a.(d)* altı aylık faizlendirme vadeli 8 000 denarlık kaç mevduat yatırılmalıdır ki, son mevduattan evvel tüm yatırımların gelecekteki değeri 60 000 denar olsun?

$r = 1 + \frac{10}{2 \cdot 100} = 1,05$'tir. Gelecekteki değer, son mevduattan altı ay önceki biriken paradır, demek ki yatırımlar dönem başıdır, yani 6 $60000 = 80000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1}$ elde edilir. Oradan da $1,05^n = 1,35714$ ve $n \approx 6,26$ elde edilir. Bu durumda $n = 7$ alınır, yani 8000 denar olmak üzere 6 sabit mevduat yatırılır, son yedinci mevduat ise özel olarak hesaplanacaktır:

$$V_0=\frac{60000}{1{,}05}-8000\frac{1{,}05^7-1{,}05}{1{,}05-1}=57143-57136=7$$

elde edilir. Buna göre son mevduat 7 denar olacaktır. ♦

Not 6. Son mevduatın değeri negatif sayı elde edildiği durumda, mevduatın gelecekteki değerini hesapladığı gün, banka mevduat sahibine o kadar para geri çevirmelidir.

Alıştırmalar

1. Altı ay vadeli dönem başı 3 500 denar mevduatlardan kaç tane ödemeliyiz ki sonunda 35000 denarımız olsun? Faizin hesaplanması altı aylık ve faiz oranı:

a) %6 *p.a.(d)* ;   b) %6 *p.a.(a)* olsun.

2. Üç aylık vadeli, %6 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden 235 000 denarlık kaç dönem sonu mevduat yatırılmalıdır ki, son mevduatın ödendiği gün hesabımızda 2 245 438 denar olsun? Faiz hesaplanması 3 aylık vadelidir.

3. Üç aylık vadeli, %6 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden 1000 denarlık kaç dönem başı mevduat yatırılmalıdır ki, hesabımızda 40 000 denar olsun? Faiz hesaplanması 3 aylık vadelidir.

4. Her iki ayın başında 1000 denar yatırılarak, son yatırımdan iki ay önce banka hesabından 7000 denar çekilmiş ve son yatırımdan altı yıl sonra hesabımızda 70 000 denar paramız kalmıştır. Son yatırım ne kadardır? Faiz oranı %12 *p.a.(d)*, faiz hesaplanması her iki ayda yapılmış olsun.

5*. Her yıl başında 2000 denar yatırılmıştır. Son yatırımdan dört yıl sonra hesaptan 7000 denar çekilmiş ve son yatırımdan altı yıl sonra hesapta 80 000 denar kalmıştır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* yıllık faizlendirmedir (dikkat ediniz, yatırım dönem başıdır ve biriken para son yatırımdan bir yıl sonra hesaplanır).

8.5. Yatırımlarda Faiz Oranının Hesaplanması

Dönem başı yatırımların, dönem sonu faizlendirmesiyle biriken gelecekteki değeri hesaplamak için kullandığımız $S_n=Vr\frac{r^n-1}{r-1}$ formülünde, S_n ve V bilindiğinde, bilinmeyen r faiz katsayısını, yani %p *p.a.(d)* değerini hesaplamak için

$$r^{n+1}-\left(\frac{S_n}{V}+1\right)r+\frac{S_n}{V}=0\,.$$

denklemi elde edilir. Bu ise r katsayısına göre bir polinom denklemidir ve genel olarak derecesi 3'ten büyüktür. Bu gibi denklemleri çözmek için (bazı özel durumlar hariç), belli bir kural yoktur. Bu nedenle, bu gibi denklemleri bilinen bazı nümerik yöntemlerle çözeceğiz. Halbuki, amacımız şimdi nümerik yöntemlerle denklemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmek değildir. Burada sadece pratik ödevlerin yararına faiz oranını en kolay biçimde belirtmektir. Bu nedenle faiz oranının hesaplanmasını $i\,/\,i$ tablolarındaki değerleri kullanan

$$\boxed{S_n=V\cdot \mathrm{III}_p^n}.$$

formülüne göre yapacağız.

1. Altı aylık vadeli dönem başı 2000 denarlık borç, hangi faiz oranıyla, 16. yılın sonunda 125 000 denar olacaktır. Faiz hesaplanması yarıyıllık olsun.

Verilen ödevde, toplam $n = 16 \,.\, 2 = 32$ ödeme vardır ve $125000 = 2000\cdot III_{\frac{p}{2}}^{n}$ geçerlidir. $III_{\frac{p}{2}}^{n}=\dfrac{125000}{2000}=62,5$ olduğuna göre, $n = 32$ için tablolarda 62,5 değerine karşılık gelen sayıyı arıyoruz. Bu değer tabloda yoktur, fakat buna en yakın iki yaklaşık değer vardır: 62,19536018 < 62,5 < 65, 20952741. Bu değerlerden biri %3,75, diğeri ise %4 faiz oranına karşılık gelir. Bu iki değer arsı 62,5 değerine karşılık gelen değeri belirtmek için, doğrusal enterpolasyon yapmamız gerekir. Bunu daha kolay yapmak için verileri tabloda yazacağız.

$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$	$\mathrm{III}_{\frac{p}{2}}^{32}$	$\frac{p}{2}$
62,19536018	3,75	62,19536018	3,75
65,20952741	4	62,5	$\frac{p}{2}$

Oradan şu orantıyı kuruyoruz:

$$(4-3,75):(65,20952741-62,19536018)=\left(\frac{p}{2}-3,75\right):(62,5-62,19536018),$$

yani $0,25:3,01416723=\left(\dfrac{p}{2}-3,75\right):0,30463982$ elde edilir. Bu şekilde, tablodaki değerler arasındaki orana göre, faiz oranı aralığının ara değerlemesi yapılır.

Buna göre, $\frac{p}{2}-3{,}75=\frac{0{,}30463982\cdot 0{,}25}{3{,}01416723}=0{,}025$, yani p = %7,55 *p.a.(d)* elde edilir.

Değerlerin farkından yararlandığımıza göre, yukarıdaki tabloyu daha bir satır ile genişletecek ve bu farkları o satırda yazmakla işimiz kolaylaşacaktır.

Aynı işlemleri dönem sonu yatırımlar için de yapacağız. Yatırımların gelecekteki değeri $S_n=V\frac{r^n-1}{r-1}$ formülünden, faiz katsayısı r için:

$$r^n-\frac{S_n}{V}r+\frac{S_n}{V}-1=0,$$

denklemi elde edilir. Bu denklem de r değişkenli polinomdur. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplamak için $i\,/\,i$ tablolarındaki değerleri kullanan $S_n=V\left(1+III_p^{n-1}\right)$ formülünden yararlanarak $\mathrm{III}_p^{n-1}=\frac{S_n}{V}-1=\frac{S_n-V}{V}$. elde edilir. n – 1'in bilinen değeri için $\frac{S_n-V}{V}$ değeri tabloda varsa, faiz oranı doğrudan doğruya okunur. Aksi halde, faiz oranını doğrusal enterpolasyon ile belirtiyoruz. ♦

2. Faiz hesaplaması 3 ay vadeli olmak üzere, her üç ay sonunda bankaya 2000 denar yatırarak 5 yıl sonra hesabımızda 52 000 denar olmak için faiz oranı ne kadar olmalıdır?

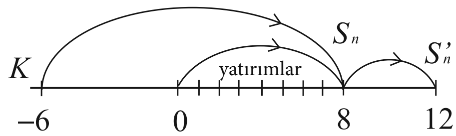
Burada, 20 ödeme, yani n =20 dönem sonu yatırımı inceliyoruz. S_n = 52 000, V=2000 ve faiz oranı $\frac{p}{4}$ olduğunu alıyoruz. O halde $52000=2000\left(1+III_{\frac{p}{4}}^{19}\right)$ denklemi elde edilir, oradan da $III_{\frac{p}{4}}^{19}=25$ elde edilir. Tablolarda 19 sayısına karşılık gelen bölümde, 25 sayısını bulamıyoruz. Ancak %2,5 sütununda 24,54244 ve %2,75 sütununda 25, 19739750 sayılarını buluyoruz. Aşağıdaki tabloyu oluşturuyoruz:

$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p	$\mathrm{III}_{\frac{p}{4}}^{19}$	p
24,54244	%2,5	24,54244	%2,5
25,19740	%2,75	25	$\frac{p}{4}$
0,65496	%0,25	0,45756	$\frac{p}{4}-2{,}5$

$0{,}65496 : 0{,}25 = 0{,}45756 : \left(\frac{p}{4} - 2{,}5\right)$ orantısını kurduktan sonra p = %10,7 elde edilir. ♦

3. Bir kişi 6 yıl önce banka hesabına 30 000 denar yatırmış, bu günden ve gelecek sekiz yıl esnasında her yıl sonunda 5 000'er denar yatıracaktır. Bu günden sekizinci yıl sonunda kişinin banka hesabında 47 745 denar birikecektir. Yıllık faiz üzerinden faiz oranı aynı olmak üzere, bu günden 12 yıl sonra banka hesabında ne kadar parası olacaktır?

Zaman ekseninde, bugüne 0 karşılık gelmek için -6 dan başlayacağız.



Şek. 7

$K = 30000$, $r = 1 + \frac{p}{100}$, $S_n = 47745$, $S_n = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$. olduğunagöre, $47745 = 5000\left(1 + \mathrm{III}_p^7\right)$,

denklemi elde edilir, oradan da $III_p^7 = 8{,}5491$ elde edilir. Tabloda n = 7 için, bunun değeri p = %5 elde edilir. Şimdi de, bugünden başlayarak 12 yıl boyunca yatırılan mevduatların toplam değerini hesaplayalım:

$S'_n = Kr^{18} + S_n r^4 = 30000 \cdot 1{,}05^{18} + 47745 \cdot 1{,}05^4 = 130233$ denar elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. 2,5 yıl boyunca her altı ay başında yatırılan 20 000 denarlık mevduatların süre sonunda toplam değeri 112 658 denar olmuştur. Mevduatlar hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

2. Dört yıl boyunca her dört ayda 5 000 denar mevduat yatırılmış ve son mevduatın yatırıldığı günde banka hesabında 75 000 denar birikmiştir. Dönem sonu hangi faiz oranıyla yatırım yapılmıştır? Yatırım vadesi dört aylıktır.

3. Her yıl

a) dönem başı; b) dönem sonu

10 000 er denar yatırılarak 20 yıl sonra hesabımızda 260 000 denar biriken paramız olması için hangi faiz oranıyla parayı yatırmalıyız?

4. Her altı ay sonunda yatırılan 3 000 denarlık mevduatlar 16. yılın sonunda 188100 denar olmuştur. Faiz hesaplama vadesi altı ayda olduğuna göre, Yatırılan para hangi faiz oranıyla hesaplanmıştır?

5. Üç aylık dönem başı 5 000 denarlık anüitelerle bankaya 8 yıl boyunca para yatırdık. Faiz hesaplanma vadesi üç aylık dönem sonu yapılarak sekizinci yıl sonunda banka hesabımızda 312500 denar birikmiştir. Yatırılan para hangi faiz oranıyla hesaplanmıştır?

8.6. Periyodik Alacaklar (Kiralar)

Yatırımlarda yapılan incelemeler, belli zaman aralıklarla alınan para miktarları için de benzer incelemeler yapılabilir. Örnek, banka hesabımızda bulunan bir miktar parayı, birden değil, belli ve eşit zaman aralıklarında küçük miktarlar halinde çekebiliriz. Eşit zaman aralıklarında alınan alacaklar söz konusu olunca ilk aklımıza gelen **kiradır**. Eşit miktarda alacakları **sabit kiralar** (**rentler**) diye adlandıracağız. Kira anüiteleri önceden belirlenmiş kanuna göre değişebilir, örneğin geometrik ya da aritmetik dizisi kanununa göre değişebilir. Böyle kiralara **değişken kiralar** denir. Özelliklerine göre kiralar birçok şekilde adlandırılıyorlar; ödeme zamanına göre, periyodun başlangıcında ödenirse **dönem başı kiralar**, periyodun sonunda ödenirse **dönem sonu kiralar** diye adlandırılıyorlar. Ödemelerin zaman süresine göre **geçici kiralar** (belli bir süre için), **ömür boyu kiralar** (kirayı ödeyen kişinin ömrünün sonuna kadar), ya da kira alacakları hiç bitmeyen olduğu durumda **daimi kiralar** söz konusudur.

Kiraların ödendiği periyotuna göre: yıllık, yarıyıllık, üç aylık, aylık vb. kiralar fark ediyoruz.

Kiranın alındığı müddetçe, parasal varlıkların faizlendirmesi devam eder ve kira periyotları ve faiz dönemleri çakışabilir, yani eşit olabilir (biz ileride sadece bu gibi kiraları inceleyeceğiz). Halbuki faiz hesaplanması, kira periyotundan daha sık ya da daha seyrek de olabilir.

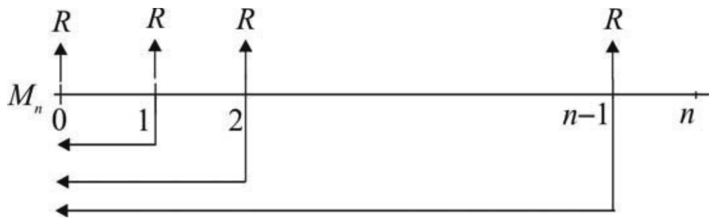
Kira almak için, önce bunu getirecek varlık temin edilmelidir. Kira getirmek amacıyla yatırılan varlık miktarına **kira sermayesi** denir. Burada bir defaya mahsus olan yatırım söz konusudur. Halbuki parasal varlıklar periyodik ödemelerle de yapılabilir. Kira alacakları, kira bedelinin yatırılmasıyla başlarsa **hemen kiralar**, kira alacakları belli bir zamandan sonra başlarsa o halde **ertelenmiş kiralar** söz konusu olur.

Sabit miktarlı, faizlendirme vadesi kiranın ödeme vadesiyle çakışan periyodik ödemeler üzerinde daha fazla duracağız. Formüllerin belirtilmesinde faiz oranı dönem sonu olduğunu varsayacağız, halbuki dönem başı durumlar için de yorumlar yapacağız.

Şu işaretlemeleri kullanacağız: M_n – kira sermayesi, R- kira (rent), n – ödeme sayısı, r – dönem sonu faiz katsayısı, ρ - dönem başı faiz katsayısı.

8.6.1. Kira Sermayesinin Hesaplanması

Başlangıç için, n defa her periyodun başında ödenen R miktarlı dönem başı kirayı inceleyelim. Gereken kira sermayesini hesaplamak için, bu miktar tüm kiraları sağlayacağını bilmemiz gerekir. Demek ki, yatırımların gelecekteki değerini hesaplarken, tüm faizlenmiş bireysel mevduatların toplamını belirttiğimiz gibi, burada da kira sermayesi aslında tüm bireysel iskontolanmış kiraların değerlerinin toplamına eşit olacaktır. **İskontolanmış değer**, aslında faizlendikten sonra R değerine biriken şimdiki değerdir. Bunu, zaman ekseninde şu şekilde gösterebiliriz (şek.8):



Şek. 8

O halde, dönem başı durumunda, r faiz katsayısıyla kira sermayesi için:

$$M_n = R + R \cdot \frac{1}{r} + R \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots + R \cdot \frac{1}{r^{n-1}}.$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, birinci kira iskonto edilmez, onun değeri şimdiki ödenen değere eşittir. İkinci kira bir periyot için iskonto edilmiş ve bu şekilde n – 1 defa iskonto edilen son kiraya kadar devam edilir. Bu şekilde elde edilmiş olan ifadeyi

$$M_n = R\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right),$$

biçiminde yazalım. Parantez içinde olan kısım, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamıdır. Mevduatlardan farklı olarak burada faiz katsayıları yerine $\frac{1}{r^k}$ **iskonto katsayısı** vardır. Formülü dönüştürmeye devam ediyoruz: $M_n = R \cdot \dfrac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} = R\dfrac{r\left(r^n - 1\right)}{r^n\left(r - 1\right)}.$

elde edilir.

$\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}}$ formülüyle dönem başı kiranın kira sermayesi hesaplanır, diğer deyişle, ilerdeki tüm ödemelerin şimdiki değerini hesaplamak için uygulanan formüldür.

Not 1. Üçüncü i / i tablo, birinci tablonun değerlerinin toplamından elde edildiği gibi, benzer şekilde dördüncü i / i tablo $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^2} + \ldots + \dfrac{1}{r^{n-1}}$, şeklinden toplam gibi, $\mathrm{I}V_p^{n-1} = \mathrm{II}_p^1 + \mathrm{II}_p^2 + \ldots + \mathrm{II}_p^{n-1}$, yani 1'den n -1 kadar periyotlarında, aynı *%p p.a.(d)* faiz oranıyla hesaplanmış ikinci tablonun değerlerinin toplamıdır.

Buna göre kira sermayesi için şu formülü elde ediyoruz:
$\boxed{M_n = R\left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-1}\right)}$.

1. Önümüzdeki her 4 yılın başlangıcında 10000 denar kira almak için, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faizin hesaplanması yılda bir defa olsun.

Kira sermayesinin hesaplanması gerekir. Toplam 4 kira $n = 4$, kira değeri $R = 10000$, yıllık faizlendirme $m = 1$ ve dönem sonu faiz katsayısı $1 + \dfrac{6}{100} = 1,06$ olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = 10000 \cdot \frac{1,06^4 - 1}{1,06^3(1,06-1)} = 36730$$

denardır. ♦

Not 2. Faizlendirme dönem başı olduğu durumda, faiz katsayısı $\rho = \dfrac{100}{100 - p}$'dir ve kira sermayesi için şu formül geçerli olacaktır:

$$\boxed{M_n = R\frac{\rho(\rho^n - 1)}{\rho^n(\rho - 1)} = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)}}.$$

2. Önümüzdeki her 4 yılın başlangıcında 10000 denar dönem başı kira almak için, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %6*p.a.(a)* ve faizin hesaplanması yılda bir defa olsun.

Ödev 1'de yapıldığı gibi, benzer şekilde hareket edilir, $\rho = \dfrac{100}{100 - 6} = 1,063829787$ elde edilir. Bunu yukarıdaki formülde yerine koyarsak M_n = 36 542 denar elde edilir. ♦

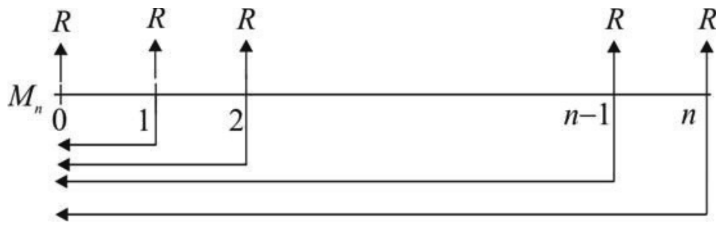
3. Önümüzdeki 10 yıl boyunca yarım yılda bir 30 000 denar kira almak istiyoruz. İlk kira hemen ödendiği takdirde, bugün ne kadar para yatırmalıyız? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* ve faizin hesaplanması yılda iki defa olsun.

Birinci ödeme hemen olduğuna göre, dönem başı kira söz konusudur. Ödeme sayısı n = 10 . 2 = 20, R = 30 000 ve $r = 1 + \dfrac{10}{2 \cdot 100} = 1,05$ biliniyor. O halde

$$M_n = 30000 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{1,05^{19}(1,05 - 1)} = 392560$$

denar olduğunu buluyoruz. ♦

Kira sayısı n, dönem sonu faiz katsayısı r, dönem sonu R değerinde kira olduğu durumda (şek.9):



Şek. 9

birinci kira, birinci periyodun sonunda ödenir ve aynısı bir periyot için iskonto edilir. İkinci kira iki periot için ve son kira n periot için iskonto edilir. O halde,

$$M_n = R\frac{1}{r} + R\frac{1}{r^2} + \ldots + R\frac{1}{r^{n-1}} + R\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{1}{r^n}\right) = R\frac{1}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}}.$$

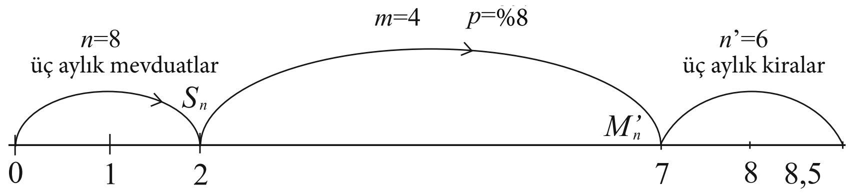
ve sonunda $\boxed{M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ elde edilir. Bu ise, vade sonu kira sermayesinin hesaplanmasında uygulanan formüldür.

Not 3. Yukarıda yapılan incelemeye göre, dördüncü i / i tablosu için, kira sermayesi formülü $\boxed{M_n = R \cdot \mathrm{I}V_p^n}$. şeklinde yazılır.

Not 4. Dönem başı faizlendirmede, dönem sonu kiralara ait formül $\boxed{M_n = R\dfrac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)}}$. dir.

4. Her üç ay sonunda 2 yıl boyunca periyodik mevduat yatırılmaya başlanmıştır. Bu günden 7 yıl sonra, üç ay vadeli, 6000 denar tutarında 1,5 yıl boyunca kira almak istiyoruz. Kira dönem başı, faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve üç aylık faizlendirme ile verilecektir. Yatırılan periyodik mevduat ne kadardır?

Periyodik yatırımları ve alacakları zaman ekseninde gösterelim (şek.10).



Şek. 10

Verilenler , $n = 2 \cdot 4 = 8$, $r = 1 + \dfrac{8}{4 \cdot 100} = 1{,}02$. 2 yılın sonunda yatırımların toplam tutarı $S_n = V\dfrac{r^n - 1}{r - 1} = \dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1}V = 8{,}583V$ dir. Yatırımın gelecekteki değeri, yani kiraların ödenmesi başlanıncaya kadar 5 yıl için faizlenir. Kira sermayesi, aslında S_n'in faizlenmiş değeridir. Buna göre , $M_n^{'} = S_n \cdot r^{5\cdot 4} = 8{,}583V \cdot 1{,}02^{20}$'dir. Sadeleştirdikten sonra $M_n^{'} = 12{,}754V$ elde edilir. Diğer taraftan kiraların verilen koşullarına göre $M_n^{'} = R \cdot \dfrac{r^{n'} - 1}{r^{n'-1}(r-1)}$ formülünde, kira sayısı n' = 1,5 · 4 = 6, r = 1,02, R = 6000 denar. Buna göre, $M_n^{'} = 6000 \cdot \dfrac{1{,}02^6 - 1}{1{,}02^5(1{,}02 - 1)} = 34281$ elde edilir.

Kira sermayesi için elde edilen iki değeri eşitlersek, 34 281 = 12,754 V elde edilir. Oradan da V = 2 688 denar olduğunu buluyoruz.

Alıştırmalar

1. Periyodik kira nedir?

2. Ödemelerin süresine göre kiralar nasıl adlandırılır?

3. Ödeme zamanına göre nasıl kiralar vardır?

4. Dönem başı ödenen yarım yıl vadeli 5000 denar kira tutarını, 20 yıl boyunca almak için ne kadar kira sermayesi gerekir? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faiz vadesi yarım yıllık olsun.

5. Altı yıl boyunca %4 *p.a.(d)* faiz üzerinden 30 000 denar yıllık vadeli
a) dönem sonu; b) dönem başı;
kira almak için, bu gün yatırmamız gereken sermaye miktarı ne kadar olmalıdır?

6. Gelecek altı yılda, her üç ayın sonunda 30 000 denar kira almak için, kira sermayesi ne kadar olmalıdır? Faiz oranı %2 *p.s.(d)* ve faiz vadesi üç aylıktır.

7*. Bugün 80 000 denar bankaya yatırıldı. İlerdeki 9 yıl zarfında her ay sonunda ne kadar para yatırmalıyız ki, son mevduatın ödendiği günden itibaren, aylık dönem başı 7000 denar kira tutarı elde edilsin? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

8*. Bu günden başlayarak ilerdeki üç yıl boyunca her ayın sonunda 5 000 denar kira tutarı almak için, bugün yatırılan 18 000 denar ile beraber 2 yıl önce ne kadar para yatırmamız gerekirdi? Faiz oranı %24 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

8.7. Kira Tutarının Hesaplanması

Kira sermayesinin değeri M_n, faizlendirme ve kira alışının koşulları verilmiş, kira tutarı bilinmeyen olsun. Kira, dönem başı olduğu durumda kira sermayesi için $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$ geçerlidir. Bu ifadeden bilinmeyen R kira tutarını ifade edeceğiz. Oradan

$$\boxed{R = M_n \frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}},$$

elde edilir. Bu formülü kullanarak dönem başı kira tutarını hesaplayacağız.

Kira, dönem sonu olduğu durumda ise, kira sermayesi için $M_n = R\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, formülü geçerlidir. Bu formülden

$$\boxed{R = M_n \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}.$$

elde edilir.

1. Bugün 200000 denar %6 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme ile bankaya yatırılmıştır. Bu kira sermayesi tutarıyla önümüzdeki 20 yıl boyunca her altı ayda bir kira

a) dönem sonu; b) dönem başı

olmak üzere alınırsa, kira tutarı ne kadar olacaktır?

$M_n = 200000$ denar kira sermayesi, R tutarlı $n = 20 \cdot 2 = 40$ kiraya eşit olmalıdır. Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \dfrac{6}{2 \cdot 100} = 1{,}03$'tür.

a) Dönem sonu kira durumunda $R = 200000 \cdot \dfrac{1{,}03^{40}(1{,}03 - 1)}{1{,}03^{40} - 1} = 8652{,}5$ denardır.

b) Kira, dönem başı olduğu takdirde

$$R = 200000 \cdot \frac{1{,}03^{39}\left(1{,}03-1\right)}{1{,}03^{40}-1} = 8400{,}5 \quad \text{denardır.} \ \blacklozenge$$

Not 1. Faizlendirme dönem başı olduğu durumda kira

$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n-1}\left(\rho-1\right)}{\rho^{n}-1}},$$

formülüyle hesaplanacaktır. ρ dönem başı faiz katsayısıdır.

Not 2. Faiz oranı dönem başı, kira dönem sonu olduğu durumda, kira

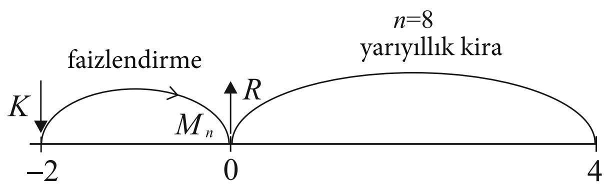
$$\boxed{R = M_n \frac{\rho^{n}\left(\rho-1\right)}{\rho^{n}-1}}.$$

formülüyle hesaplanacaktır.

2. İki yıl önce bankaya 120 000 denar %5 *p.a.(d)* yarı yıllık faizlendirmeyle yatırılan parayla, bu günden başlayarak 4 yıl boyunca, her altı ay başında ne kadar kira alabiliriz?

K = 120 000, r = 1,025, n = 4 . 2 = 8'dir. Bu verilerle, kira her yarıyıl başında alındığına göre, dönem başı kira formülünü uyguluyoruz:

$$R = M_n \frac{r^{n-1}\left(r-1\right)}{r^{n}-1} = M_n \frac{1{,}025^{7}\left(1{,}025-1\right)}{1{,}025^{8}-1} = 0{,}136 M_n .$$

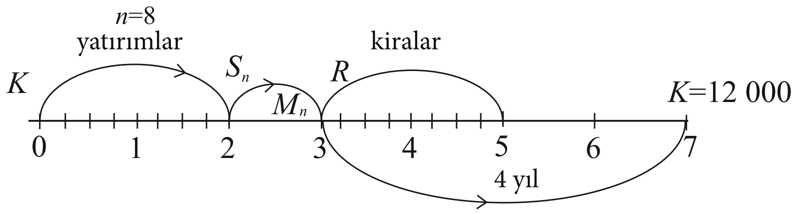


Şek. 11

Zaman ekseninde görüldüğü gibi, kira iki yıl ertelenmiştir ve 120 000 denarlık kapital kira sermayesi olarak kullanıldığı ana kadar $M_n = K \cdot r^{2\cdot 2} = 120000 \cdot 1{,}025^{4} = 132457{,}5$ ve R= 0,136 . 132 457,5 = 18 014 denardır. ♦

3. Bu günden başlayarak önümüzdeki iki yıl boyunca, her üç ay sonunda 3 000'er denar para yatırılacaktır. Yatırılan son taksitten bir yıl sonra başlayarak bu yatırımdan 2 yıl boyunca, her üç ayın başında kira ödenecektir. Banka hesabımızda bu günden yedi yıl sonra 12 000 denar para biriktiğini varsayarak, kira tutarı ne kadar olacaktır? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* faizlendirme üç aylık vadelidir.

Zaman eksenini çizdikten sonra işaret edelim (şek.12).



Şek. 12

$$V_{dq} = 3000\,, \quad n = 2\cdot 4 = 8\,, \quad r = 1 + \frac{8}{4\cdot 100} = 1{,}02 \text{ ve } S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1} = 3000\cdot\frac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 25749$$

denardır. Bu miktar para bir yıl faizde kalır ve kiraların toplam tutarını ve kalan 1200 denarın bedelini sağlar. Buna göre, $S_n r^4 = M + 12000\cdot\frac{1}{r^{4\cdot 4}}$. denklemini yazabiliriz. 12000 denar tutarının, dört yıl için üç ay vadeli iskontosu hesaplanır. O halde $S_n r^{20} = Mr^{16} + 12000$ elde edilir. Kira sermayesi M ile işaret edersek, kira sermayesi tutarı dönem başı üç aylık vadeli 8 kiraya denktir. O halde $M = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} = R\frac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02^7(1{,}02 - 1)} = R\cdot 7{,}472$ elde edilir. bunu yukarıdaki ifadede yerine değiştirirsek $25749\cdot 1{,}02^{20} = R\cdot 7{,}472\cdot 1{,}02^{16} + 12000$ ve sonunda $R = \frac{25749\cdot 1{,}02^{20} - 12000}{7{,}472\cdot 1{,}02^{16}} = 2560$ denar elde edilir. ♦

Alıştırmalar

1. Bugün bankaya 100 000 denar kira sermayesi ödedik. Önümüzdeki 8 yıl boyunca yatırılan para miktarıyla, %3 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme ile dönem sonu yarıyıllık kira tutarı ne kadar olacaktır? Faizlendirme dönem başı, faiz oranı aynı %3 *p.a.(a)* olduğu durumda kira tutarı ne kadar olacaktır?

2. Bugün bankaya 150 000 denar para yatırdık. Önümüzdeki 2,5 yıl boyunca yatırılan miktardan, her üç ay sonunda %8 *p.a.(d)* faiz oranı üzerinden ödenecek kira tutarı ne kadar olacaktır?

3. Bugün 90 000 denar yatırdık. Bu yatırımdan dönem başı, üç aylık vadeli olmak üzere 3 yıl sonra başlayarak ilerdeki 5 yıl boyunca kira alacağız. Faiz oranı %10, 3 aylık vadeli faizlendirme olduğuna göre, kira tutarı ne kadar olacaktır?

4*. Biri 33. doğum gününden 38. doğum gününe kadar, her yarıyıl başında 4 800'er denar banka hesabına yatırmıştır. Bu kişi 41. doğum gününden 48. doğum gününe kadar her yarıyıl sonunda alacağı kira tutarı ne kadardır? Yarıyıllık vadeli faizlendirme; faiz oranı %6 *p.a.(d)*'dir.

5. İki yıl önce 12 000 denar para yatırdık ve 2,5 yıl sonra, her yarıyıl sonunda kira alacağız. Faiz oranı % 5*p.a.(d)* yarıyıllık faizlendirme uygulamakla alınacak kira tutarı ne kadar olacaktır?

8.8. Kira Sayısı ve Kira Kalanının Hesaplanması

Kira sermayesinin hesaplanmasında kullanılan formüldeki büyüklükler arasında, kira sayısı da bulunmaktadır. Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, kira sayısını ifade edebiliriz. Dönem başı kiralar için, $M_n = R\dfrac{r^n-1}{r^{n-1}(r-1)} = Rr\dfrac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ kira sermayesi formülüne birkaç denk dönüşüm uygulayarak:

$$\frac{M_n(r-1)}{Rr} = 1-\frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1-\frac{M_n(r-1)}{Rr} = \frac{Rr-M_n(r-1)}{Rr},$$

$$r^n = \frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

elde edilir. Elde edilen denklemin iki tarafının logaritmasını alalım: $\log r^n = \log\dfrac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}$, ve logaritma işleminin bir özelliğini kullanarak

$$n\cdot\log r = \log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}.$$

elde edilir. Oradan da

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\cdot\log\frac{Rr}{Rr-M_n(r-1)}}$$

elde edilir. Bu formülü kullanarak kira sayısını hesaplayacağız.

1. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yarıyıl vadeli faizlendirme ile 129442 denar kira sermayesi yatırılmıştır. İlk kira hemen alındığı takdirde, 1200 denar tutarında yarıyıllık kaç kira alınabilir?

Birinci kira hemen alındığına göre, dönem başı kira söz konusu olduğunu önceden kaydedelim. Bilindiği üzere

$$M_n = 129442, \quad r = 1+\frac{4}{2\cdot 100} = 1{,}02, \quad R = 12000.$$

denardır. Buna göre kira sayısı

$$n=\frac{1}{\log 1{,}02}\cdot\log\frac{12000\cdot 1{,}02}{12000\cdot 1{,}02-129442\cdot(1{,}02-1)}=116{,}277\cdot\log 1{,}268241=12\,.\blacklozenge$$

Not 1. Faiz oranı dönem başı ise, dönem başı yatırım için kira sayısı:

$$\boxed{n=\frac{1}{\log\rho}\cdot\log\frac{R\rho}{R\rho-M_n(\rho-1)}},$$

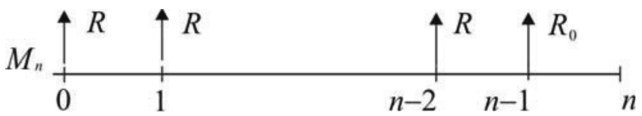
formülüyle hesaplanacaktır. Burada $\rho=1+\dfrac{100}{100-p}$, dönem başı faiz katsayısıdır.

2. Bugün bankaya 140000 denar yatırıyoruz. Yatırılan paraya banka yıllık %5 *p.a.(d)* faiz ödüyor. Yatırılan bu parayla 10 000 denar tutarında dönem başı yıllık kaç kira alabiliriz?

$M_n=140000$, $R=10000$ ve $r=1+\dfrac{5}{100}=1{,}05$ verilmiştir, bundan dolayı

$$n=\frac{1}{\log 1{,}05}\cdot\log\frac{10000\cdot 1{,}05}{10000\cdot 1{,}05-140000(1{,}05-1)}=22{,}517\,.\blacklozenge$$

Elde edilen değer tam sayı değildir. Bu ise şunu gösteriyor: Ödenen 22 kira ile yatırılan paranın tümü harcanmamıştır, fakat 10 000 denar tutarında olan kiralardan bütün 23 kira ödemek için yeterli para yoktur. O halde kira sayısı, elde edilen sayıdan büyük olan ilk doğal sayıdır, fakat ilk 22 kira tutarı eşit, son olan 23. kira diğerlerinden küçüktür.



Şek.13

Son kira için ya da **kira kalanı** diye adlandırılan tutarı hesaplamak için formül bulacağız. Son kirayı R_0 ile işaret edelim. Bu durum zaman ekseni şek. 13'te gösterilmiştir. Kira sermayesinin bireysel kiralarını iskonto ederek:

$$M_n=R+R\cdot\frac{1}{r}+R\cdot\frac{1}{r^2}+\ldots+R\cdot\frac{1}{r^{n-2}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-2}}\right)+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade bir sonsuz geometrik dizisinin ilk n terim toplamıdır. Buna göre:

$$M_n=R\cdot\frac{1-\dfrac{1}{r^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{r}}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}=R\cdot\frac{r\left(r^{n-1}-1\right)}{r^{n-1}(r-1)}+R_0\cdot\frac{1}{r^{n-1}}\,.$$

elde edilir. Buradan da, kira kalanı için şu formülü elde ediyoruz:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \frac{r\left(r^{n-1} - 1\right)}{r^{n-1}\left(r-1\right)} \right] \cdot r^{n-1}}.$$

Not 2. Bu ifadeyi dördüncü ve birinci *i / i* tablolarıyla ifade edersek, formül:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \left(1 + \mathrm{I}V_p^{n-2}\right)\right] \cdot \mathrm{I}_p^{n-1}},$$

şeklinde yazılabilir. Burada $1 + \mathrm{I}V_p^{n-2} = \dfrac{r\left(r^{n-1} - 1\right)}{r^{n-1}\left(r-1\right)}$. dir.

Bizim örnekte n = 23 olduğuna göre:

$$R_0 = \left[140000 - 10000 \cdot \frac{1{,}05\left(1{,}05^{22} - 1\right)}{1{,}05^{22}\left(1{,}05 - 1\right)} \right] \cdot 1{,}05^{22} = 5231{,}75$$

denar elde edilir. Kira kalanı daima kira tutarından küçüktür.

M_n kira sermayesi, n defa alınmış olan dönem sonu kira R ve dönem sonu faiz katsayısı r verilmiş olsun. Kira sermayesi formülünden

$$\frac{M_n}{R}\left(r-1\right) = 1 - \frac{1}{r^n},$$

$$\frac{1}{r^n} = 1 - \frac{M_n}{R}\left(r-1\right) = \frac{R - M_n\left(r-1\right)}{R},$$

elde edilir. Buradan da

$$r^n = \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)}.$$

elde edilir. Bu ifadenin iki tarafının logaritmasını alalım:

$$\log r^n = \log \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)},$$

oradan da

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{R}{R - M_n\left(r-1\right)}}.$$

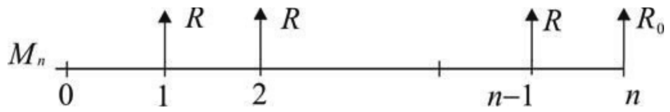
elde edilir.

Not 3. Verilen faiz oranı dönem başı olduğu durumda, kira sayısı için

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R}{R - M_n\left(\rho-1\right)}}.$$

formülü geçerli olacaktır.

n tam sayı olduğu durumda, bu sayı alınacak kira sayısıdır, aksi halde tam sayı olmadığı durumda, kira sayısı bu sayıdan büyük olan ilk doğal sayı alınır. Dönem başı kiralar için yapıldığı gibi, burada da R_0 kira kalanı hesaplanabilir (şek.14).



Şek. 14

Kiraları iskontolayarak kira sermayesi için:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r} + R\cdot\frac{1}{r^2} + \ldots + R\cdot\frac{1}{r^{n-1}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^{n-1}}\right) + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

elde edilir. Parantez içindeki toplam, ilk terimi $\frac{1}{r}$ ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan bir geometrik dizisinin toplamı olduğuna göre:

$$M_n = R\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}} + R_0\cdot\frac{1}{r^n} = R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + R_0\cdot\frac{1}{r^n}.$$

elde edilir. Oradan da,

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]\cdot r^n}$$

elde edilir. Bu ifade, dönem sonu kira kalanını hesaplamak için formüldür.

Not 4. $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ ifadesi $\mathrm{I}V_p^{n-1}$, ile değiştirildiğine göre, *i / i* tablolarından yararlanmakla kira kalanı için şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R\cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]\cdot \mathrm{I}_p^n},$$

Not 5. Kira kalanını hesaplamak için elde edilen formüllerde, faiz katsayısı *r*, dönem başı faiz katsayısı ρ ile değiştirilirse, dönem başı faizlendirme için karşılık gelen kira kalanı formülleri elde edilecektir.

3. Yıllık dönem sonu kira almak için, bugün bankaya 280 000 denar yatırıyoruz. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* yıllık olduğuna göre 20 000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Son kira ne kadardır?

Şu veriler biliniyor: M_n = 280 000, kira R= 20 000 ve r = 1,05. n kira sayısını belirtmek istiyoruz. Yukarıdaki formüllerden:

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05}\cdot\log\frac{20000}{20000-280000\cdot(1{,}05-1)} = 24{,}6765.$$ elde edilir.

Buna göre, alınacak kira sayısı n = 25'tir. Halbuki burada kiralardan ilk 24 tanesinin tutarı eşit, son kira tutarı ise farklı ve 20 000 denardan az olacaktır. O halde kira kalanı için:

$$R_0 = \left[280000 - 20000 \cdot \frac{1{,}05^{24} - 1}{1{,}05^{24}(1{,}05-1)}\right] \cdot 1{,}05^{25} = 13637{,}4$$

denar olduğunu buluyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Bugün bankaya 910122,27 denar yatırdık ve bu günden başlayarak her üç ay sonunda 100000 denar tutarında kira alacağız. Faiz oranı üç aylık vadeli %7 *p.a.(d)* olduğuna göre kaç kira alabiliriz?

2. Bugün bankaya 339318,67 denar yatırdık. Faiz oranı altı aylık vadeli %10 *p.a.(d)* olduğuna göre, dönem başı altı ay vadeli kaç kira alabiliriz?

3. Bugün 500000 denar altı ay vadeli %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla bankaya yatırdığımız takdirde, bu günden başlayarak her altı ay sonunda 50000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Kira kalanı ne kadardır?

4. Bankaya yatırılan 1 300 000 denar para ile, üç aylık vadeli, dönem sonu 40 000 denar tutarında kaç kira alabiliriz? Faiz oranı dönem sonu üç aylık vadeli %9 *p.a.(d)*'dir. Kira kalanı ne kadardır?

5. Bugün bankaya 120 000 denar yatırdık ve bu günden başlayarak her altı ay başında 4 800 denar tutarında kira alacağız. Faiz oranı altı aylık vadeli %4 *p.a.(d)* olduğuna göre kaç kira alabiliriz ve kira kalanı ne kadardır?

8.9. Periyodik Kiralarda Faiz Oranının Hesaplanması

Faiz oranı bilinmeyen, diğer büyüklükler ise biliniyorsa, onu kira sermayesi formülünden bilinmeyen büyüklük gibi hesaplanacaktır: dönem başı için $M_n = R\left(1 + IV_p^{n-1}\right)$ ve dönem sonu için $M_n = R \cdot IV_p^n$.

1. Hangi yıllık vadeli faiz oranıyla 600 000 denar yatırılmalıdır ki, 25 yıl boyunca her yıl başı 50 000 denar tutarında kira alınsın?

Dönem başı kiralara ait kira sermayesinin temel formülünü açalım. Amaç, *r* dönem sonu faiz katsayısının değerini bulmaktır.

$$M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}, \text{ buradan}$$

$$(M_n - R)r^n - M_n r^{n-1} + R = 0\,.$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemde bilinmeyen r'dir ve derecesi genellikle 4'ten büyüktür. Böyle denklemleri çözmek için sayısal yöntemler kullanılır ve bu yöntemlerin uygulanması hayli zordur. Halbuki, $\boxed{M_n = R(1 + IV_p^{n-1})}$, formülünü kullanarak, IV_p^{n-1} finansal tablosundan değerleri okuyarak, p faiz oranını kolay belirtebiliriz. Halbuki IV_p^{n-1} tablosunda aranılan değer yoksa, bileşik faiz hesabında ve mevduatlarda yapıldığı gibi lineer enterpolasyon denilen yöntem uygulanır.

Konkre olarak, ödev 1'de M_n = 600 000, R = 50 000, n = 25'tir. Formülü uygulamakla $600\,000 = 50\,000 \cdot (1 + IV_p^{24})$ olduğuna göre IV_p^{24} = 11 elde edilir. IV_p^{24} tablosunda 11 değeri hiçbir faiz oranına karşılık gelmediğini görüyoruz. Bu nedenle ona en yakın olan değerleri 10,9830 < 11 < 11,4693 alıyoruz. Bu durumda $IV_{7,5}^{24}$ = 10,9830 ve IV_7^{24} = 11,4693 olduğunu buluyoruz. Şu tabloyu oluşturuyoruz:

IV_p^{24}	p	IV_p^{24}	p
10,9830	7,5	10,9830	7,5
11,4693	7	11	p
0,4863	– 0,5	0,017	$p - 7{,}5$

0,4863 : (– 0,5) = 0,017 : (p – 7,5) orantısından $p = \frac{-0{,}5 \cdot 0{,}017}{0{,}4863} + 7{,}5 = 7{,}482\%$. elde edilir. Demek ki aranılan faiz oranı % 7,482'dir. ♦

2. Bir kişi, 5 yıl boyunca her yarıyıl sonunda 60 000 denar kira alıyormuş. Kira sermayesi olarak, ilk alınan kiradan altı ay önce 463 302 denar yatırıldığına göre, altı ay vadeli faizlendirme hangi faiz oranıyla yapılmıştır?

Burada dönem sonu kira tutarı R = 60 000, kira sermayesi tutarı M_n = 463 302, n = 5 . 2 = 10 defa verilmiştir. Dönem sonu kiraya ait kira sermayesi formülü $M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$'dir. Bu eşitliği r faiz katsayısına göre düzenlersek $M_n r^{n+1} - (M_n + R)r^n + R = 0$ denklemi elde edilir. Bizim örneğimizde bu denklem 11. derecedir ve bunun çözümünü belirtmek kolay değildir. Bu nedenle finansal tablolarda $M_n = R \cdot IV_{\frac{p}{2}}^n$ kira sermayesinin formülünden yararlanacağız. $\frac{p}{2}$

yarıyıllık etkin faiz oranıdır. Demek ki, $463302 = 60000 \cdot IV_{\frac{p}{2}}^{10}$ olduğuna göre $IV_{\frac{p}{2}}^{10} = 7,7217$ elde edilir. Tabloda n =10 için 7,7217 sayısına $\frac{P}{2} = \%5$ karşılık gelir. Buna göre yıllık nominal faiz oranı %10 *p.a.(d)* olduğunu buluyoruz. ♦

3. 12 yıl, altı ay boyunca yarıyıllık faiz vadesiyle, dönem sonu altı aylık 10 000 denar tutarında kira almak için, 12 000 denar kira sermayesini hangi faiz oranıyla yatırmalıyız?

Formülde M_n = 120 000, R = 10 000 ve kira sayısı n = 12,5 . 2 = 25 değerlerini değiştirirsek $120000 = 10000 \cdot IV_{\frac{p}{2}}^{25}$ denkleminden $IV_{\frac{p}{2}}^{25} = 12$ elde edilir. Dördüncü i / i tablosunda n = 25 için 12 sayısını değil, ona en yakın komşuluğunda bulunan iki sayıyı seçiyoruz. Bunlar 12,1979 sayısı, ki buna %6,5 faiz oranı ve 11,6536 sayısı ki buna %7 faiz oranı karşılık gelir.

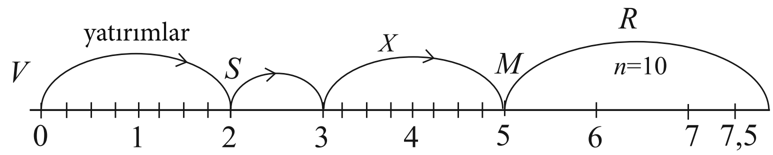
Bu verileri tabloda yazarak enterpolasyon yapacağız.

$IV_{p/2}^{25}$	$p/2$	$IV_{p/2}^{25}$	$p/2$
11,6536	7	11,6536	7
12,1979	6,5	12	$p/2$
0,5443	– 0,5	0,3464	$p/2-7$

0,5443: (– 0,5)= 0,3464: *(p* /2 – 7,5) orantısından $\frac{p}{2} = \frac{-0,5 \cdot 0,3464}{0,5443} + 7 = 6,682\%$. elde edilir. Buna göre yıllık nominal faiz oranı %13,364 *p.a.(d)*'dir. ♦

4. Bugünden başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca, her üç ayın sonunda 16 000 denar para bankaya yatıracağız. Bu günden üç yıl sonra hesabımızdan o kadar para çekmeliyiz ki beş yıl sonra hesabımızda kira sermayesi olarak 30840 denar paramız birikmiş olsun. Bu kira sermayesinden yaralanarak 2,5 yıl boyunca 4000 denar tutarında dönem sonu üç ay vadeli kira alacağız. Bu günden üç yıl sonra hesabımızdan hangi miktar parayı çekmeliyiz? Faiz oranı bu zaman süresinde daima aynıdır.

İki yıllık yatırım yapılıyor, fakat faiz oranını bilmediğimizden mevduatın tutarını hesaplayamıyoruz. Halbuki kira için verilerimiz vardır ve oradan faiz oranını hesaplayacağız. Bu verileri zaman ekseni üzerinde gösterdikten sonra denklemler kuracağız.



Şek. 15

S yatırımının son değeri bir yıl faizlenir, X tutarında para çekilir ve kalan para daha iki yıl faizlenir. Bugünden 5 yıl sonraki günde, bankada biriken para tutarı, kiraların toplam tutarına karşılık gelir. Buna göre $\left(S \cdot r^4 - X\right) \cdot r^8 = M$ denklemi elde edilir. Önce faiz oranını hesaplayalım. Kira sermayesi formülünden $M = R \cdot IV_{\frac{p}{4}}^{n}$ yazabiliriz, burada n kira sayısıdır ve örneğimizde n = 2,5 · 4 =10 kiradır. Buna göre $IV_{\frac{p}{4}}^{n} = 7,71$ elde edilir. Bu değer $\frac{p}{4} = \%8$ faiz oranına karşılık gelir. Demek ki, p = %32 *p.a.(d)* olduğunu buluyoruz. Buna göre $r = 1 + \frac{32}{4 \cdot 100} = 1,08$ değerini X'in bulunduğu denklemde yerine koyabiliriz. Yatırım dönem sonu olduğuna göre $S = 16000 \frac{1,08^8 - 1}{1,08 - 1} = 170186$ denar elde edilir. O halde, $\left(170186 \cdot 1,08^4 - X\right) \cdot 1,08^8 = 30840$ denklemi elde edilir. Bunun çözelim, 231536 – X = 16662 oradan da X = 231536 – 16662 = 214874 denar olduğunu buluyoruz.

Çekilmesi gereken miktar 214874 denardır. ♦

Alıştırmalar

1. On yıl boyunca her üç ayın başlangıcında 10 000 denar tutarında kira alınmıştır. İlk alınan kiranın ilk gününde 200 000 denar para yatırılmışsa, üç ay vadeli hangi faiz oranı kullanılmıştır?

2. 12 yıl boyunca her üç ayda bir 2 000 denar dönem başı kira almak için, 70 000 denar hangi faiz oranıyla yatırılmalıdır? Faizlendirme her üç ayda bir yapılacaktır.

3. Altı yıl boyunca her altı ayda 6 000 denar tutarında dönem sonu kira almak için, 45 216 denar kira sermayesi, hangi faiz oranıyla yatırılmalıdır?

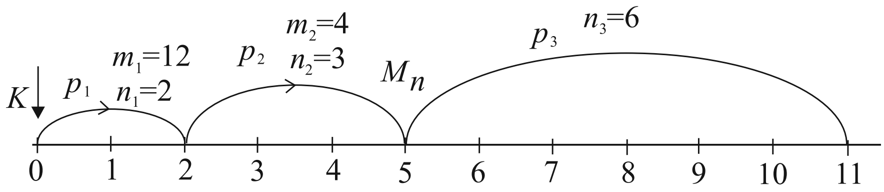
4. Bir kişi 36 000 denar yatırım yaparak ilerdeki 5 yıl boyunca, her dördüncü ayda 4 500 denar tutarında kira almalıdır. Dört ay vadeli hangi faiz oranı kullanılmıştır?

5*. Bir yıl önce yatırılan tutarın şimdiki değeri 45 000 denardır ve her ikinci ay sonunda bu paradan iki yıl boyunca 5 000 denar tutarında kira alınacaktır. Kira iki ay vadelidir. Bir yıl önce hangi miktar para yatırılmıştır?

8.10. Karma Ödevler*

Tüm *i / i* tablolarının uygulanmış olduğu bazı çözülmüş ödevler üzerinde duracağız. Verilen örnekler, yatırımlar (mevduatlar) ve bileşik faizlendirmeden oluşan bileşik kombinasyonlardan meydana gelmiştir.

1. Bugün ne kadar kapital yatırmalıyız ki, bu günden başlayarak 5 yıl sonraki altı yıl boyunca her üç ay başında 9000 denar tutarında kira almak için yatırımımız olsun. Faizler: ilk iki yılda aylık vadeli %6 *p.s.(d)* faiz oranıyla, sıradaki üç yılda üç ay vadeli %10 *p.a.(a)* faiz oranıyla ve son altı yılda faiz oranı %4 *p.q.(d)* hesaplanacaktır (şek.15).



Şek. 16

Kira sermayesi, aslında anaparanın faizlenmiş tutarıdır ve farklı periyotlarda farklı faiz oranlarına göre şu şekilde hesaplanacaktır:

- İlk iki yıl $2 \cdot 12 = 24$ defa, $r = 1 + \dfrac{2 \cdot 6}{12 \cdot 100} = 1{,}01$, faiz katsayısıyla faizlenecek,

- sıradaki 3 yılda $3 \cdot 4 = 12$ defa $\rho = \dfrac{100}{100 - \dfrac{10}{4}} = 1{,}02564$, faiz katsayısıyla ve

- kiraların hesaplanmasında, toplam $6 \cdot 4 = 24$ kira, üç aylık vadeli %4 etkin faiz oranıyla, ya da $r' = 1{,}04$ faiz katsayısıyla faizlenecektir.

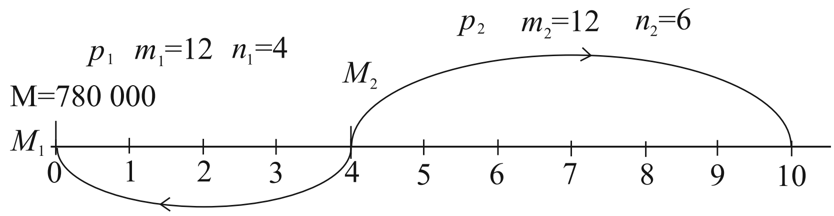
Buna göre, $K \cdot r^{24} \cdot \rho^{12} = M_n$, ve $M_n = R \cdot r' \dfrac{r'^{24} - 1}{r'^{24}(r' - 1)}$.dir. Verilen değerleri değiştirdikten sonra elde edilen ifadeleri eşitliyoruz. Bu şekilde

$$K \cdot 1{,}01^{24} \cdot 1{,}02564^{12} = 9000 \cdot 1{,}04 \frac{1{,}04^{24} - 1}{1{,}04^{24}(1{,}04 - 1)},$$

denklemi elde edilir. İfadenin sadeleştirilmesiyle 1,72 K = 142 712 elde edilir. Buna göre bugün ödenmesi gereken tutar *K* = 82 972 denar olduğunu buluyoruz. ♦

2. Banka hesabımıza 780 000 denar tutarında kira sermayesi yatırıyoruz. Faiz oranı ilk 4 yıl boyunca %6 *p.a.(d)* ve gelecekteki altı yıl boyunca %8 *p.a.(d)* olmak üzere, on yıl boyunca ayda ne kadar kira alınabilir? Faizlendirme işlemi aylık ve ilk kira, kira sermayesinin yatırıldığından bir ay sonra başlayacaktır.

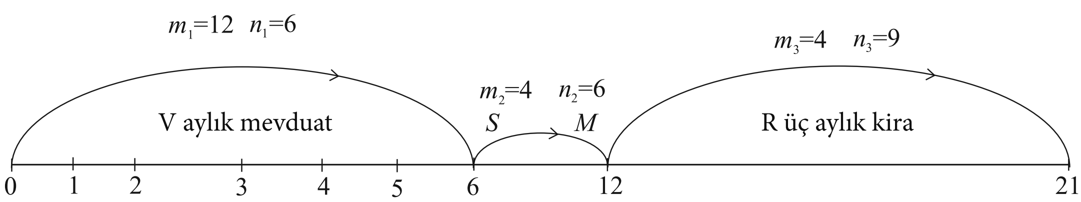
Önce, ilk kira ödemesi ay sonunda yapıldığına göre, dönem sonu kiradan bahsedildiğini fark edelim. Farklı faiz oranları uygulandığından, aynı tutarlı fakat farklı kira sermayesi ile, ilk 4 yılda bir, ikinci 6 yılda ikinci kira ödendiğini farz edebiliriz (şek.17)



Şek. 17

İlk dört yıl için gereken kira sermayesi M_1 ve ilerdeki 6 yıl için M_2 olsun. Ödenen toplam kira sermayesi tutarı M_1 ve iskontolanmış M_2 tutarlarının toplamıdır. Birinci kira $4 \cdot 12 = 48$ defa, dönem sonu faiz katsayısı $r_1 = 1 + \frac{6}{12 \cdot 100} = 1{,}005$ ile hesaplanacaktır ve elde edilen kira sermayesi $M_1 = R \cdot \frac{1{,}005^{48} - 1}{1{,}005^{48}(1{,}005 - 1)} = 42{,}580R$'dir. İkinci kira $6 \cdot 12 = 72$ defa, dönem sonu faiz katsayısı $r_2 = 1 + \frac{8}{12 \cdot 100} = 1{,}00667$ olduğuna göre, ikinci kira sermayesi $M_2 = R \cdot \frac{1{,}00667^{72} - 1}{1{,}00667^{72}(1{,}00667 - 1)} = 57{,}028R$'dir. O halde $M = M_1 + M_2 \cdot \frac{1}{r_1^{4 \cdot 12}}$ eşitliğinden $780000 = 42{,}580R + 57{,}028R \cdot 1{,}005^{-48}$ denklemi elde edilir. Denklemi çözerek aylık kira R = 8917 denar olduğunu elde ediyoruz. ♦

3. Dokuz yıl boyunca üç ay vadeli 18 000 denar tutarında kira almak istersek, her ay başında 6 yıl boyunca ne kadar mevduat yatırılmalıdır? Son yatırılan mevduattan ilk kira alınıncaya kadar 6 yıl 1 ay geçecektir. Faiz oranı %8 *p.a.(d),* faizlendirme ilk 6 yılda aylık vadeli, ondan sonra üç aylık vadeli olacaktır (şek.18).



Şek. 18

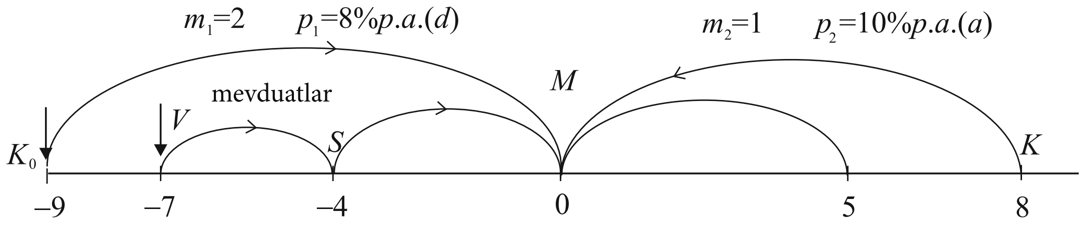
Bilinmeyen, bireysel mevduat V'dir. Mevduat toplam $6 \cdot 12 = 72$ defa dönem başıdır. Altıncı yıl sonunda $r_1 = 1 + \frac{8}{12 \cdot 100} = 1,00667$ faiz katsayısıyla yatırımların son tutarı S hesaplanır. Buna göre, $S = V \cdot r_1 \frac{r_1^{72} - 1}{r_1 - 1} = V \cdot 1,00667 \frac{1,00667^{72} - 1}{1,00667 - 1} = 92,65V$. elde edilir. S tutarına, kira sermayesi olduğu andan itibaren faizlendirmeye başlanır. Son mevduattan ilk kiranın ödenmesine kadar 6 yıl 1 ay süre vardır, fakat S son mevduattan bir ay sonra hesaplanmaya başlıyor. Demek ki, faizlendirme süresi 6 yıldır. O halde, S tutarını belirttikten sonra faizlendirme üç aylık vadeli olduğuna göre $M = S \cdot r_2^{6 \cdot 4}$'dir. Bu durumda r_2 faiz katsayısı için $r_2 = 1 + \frac{8}{4 \cdot 100} = 1,02$ elde edilir. Buna göre kira sermayesi için $M = S \cdot 1,02^{24} = 92,65 \cdot 1,02^{24} V = 149V$ elde edilir.

Diğer taraftan, kira sermayesini kiranın koşullarına göre hesaplayacağız. Kira her üç ay vadeli 9 yıl boyunca alınır. Demek ki, ilk üç ayın başlangıcından başlayarak, yani dönem başı toplam $n = 9 \cdot 4 = 36$ kira ödenir. Faiz katsayısı $r_2 = 1,02$'dir. Buna göre,

$$M = R \cdot r_2 \frac{r_2^{36} - 1}{r_2^{36}(r_2 - 1)} = 18000 \cdot 1,02 \frac{1,02^{36} - 1}{1,02^{36}(1,02 - 1)} = 18000 \cdot 26 = 468000 .$$

elde edilir. Kira sermayesinin iki değerini eşitleyerek 149 V = 468 000 elde edilir. Buna göre, V = 3141 denardır. ♦

4. Biri 9 yıl önce banka hesabına 38 000 denar yatırmıştır. İlk iki yılda başka yatırım ve para çekme olmamıştır. Ondan sonra 3 yıl boyunca her 6 ayda 8 000 denar tutarında mevduatlar yatırılmıştır. Bu günden başlayarak ilerdeki 4 yıl boyunca yıllık vadeli 15 000 denar tutarlı kira alınacaktır. Bu güne kadar yarıyıllık vadeli faiz oranı %8 *p.a.(d),* bu günden itibaren ise yıllık vadeli faiz oranı %10 *p.a.(d)* uygulandığına göre, son kiradan sonra kişinin banka hesabında ne kadar parası olacaktır? (şek. 19).



Şek. 19

Ödenen mevduatların faizlenmiş değerlerini, gereken kira sermayesi ve iskonto kalanı K ile eşitleyeceğiz. Bu güne kadar faiz katsayısı $r_1 = 1 + \frac{8}{2 \cdot 100} = 1,04$ 'tür. Yatırılan ilk mevduat tutarı K_0 = 38 000 denardır ve bugüne kadar yarıyıllık vade ile toplam 9 · 2 =18 defa faizlenir. 3·2 = 6 defa yatırılan mevduatın toplam tutarı $S = V \cdot r_1 \frac{r_1^6 - 1}{r_1 - 1} = 8000 \cdot 1,04 \frac{1,04^6 - 1}{1,04 - 1} = 55186$ denardır ve bu tutar bugüne kadar faizlenir ve bu şekilde bugüne kadar yatırılan paranın toplam tutarı

$K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{4 \cdot 2} = 38000 \cdot 1,04^{18} + 55186 \cdot 1,04^{8} = 152507$ denardır.

Banka hesabından ilerde çekilen parasal değerleri hesaplamak için, kira ve kalanın iskontolanmış değerini hesaplamak gerekir. Son kiradan sonra, 4 yıl faizde kalan dönem başı yıllık vadeli mevduat söz konusu olduğunu belirtmeliyiz. Bu demektir ki son kiradan dört yıl sonra, bugünden ise 8 yıl sonra için kalan para tutarını hesaplayacağız. O halde, dönem başı faiz katsayısı $\rho_2 = \frac{100}{100 - 10} = 1,11$ olduğuna göre, K kalanının iskontolanmış değeri $K \cdot \frac{1}{\rho_2^8}$ 'dir.

O halde kira sermayesi için $M = R \cdot \rho_2 \cdot \frac{\rho_2^5 - 1}{\rho_2^5 (\rho_2 - 1)}$, geçerlidir. Beş yıllık dönem başı yıllık vadeli 15 000 denar kira tutarı için $M = 15000 \cdot 1,11 \cdot \frac{1,11^5 - 1}{1,11^5 (1,11 - 1)} = 61537$ denar elde edilir.

$K_0 \cdot r_1^{18} + S \cdot r_1^{8} = M + K \cdot \frac{1}{\rho_2^8}$, şimdiye kadar yapılan yatırımları ve alımları eşitlemekle 152507 = 61537 + $K \cdot 1,11^{-8}$ elde edilir ve oradan K = 39 474 denar olduğunu buluyoruz. Bu günden sekizinci yılın sonunda banka hesabında 39 474 denar kalacaktır. ♦

Alıştırmalar

1*. 11 yıl önce banka hesabımıza, yarıyıllık vadeli 4 yıl boyunca 8 000 denar tutarında mevduatlar yatırmaya başladık. 3 yıl önce bir defaya mahsus daha 90 000 denar yatırdık. Bugünden başlayarak yedi yıl boyunca aylık kiralar alacağız ve 49 aydan sonra hesabımızda daha 50 000 denar kalacaktır. Faiz oranı, bugüne kadar yarıyıllık vadeli %8 *p.a.(d)* ve bu günden sonuna kadar aylık vadeli %12 *p.a.(d)* olduğuna göre kira tutarı ne kadardır? Kiralar ve mevduatlar dönem başıdır.

2*. 12 yıl önce bankaya bir miktar para yatırdık. Ondan üç yıl sonra, 5 yıl boyunca her altı ayda 3 000 denar tutarında mevduatlar yatırdık. Bu günden başlayarak 8 yıl boyunca altı ay vadeli 5 000 denar tutarında kira alacağız. Son kiradan 1 yıl 6 ay sonra banka hesabımızda daha 4 000 denar paramız olacaktır. Bugüne kadar faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve bugünden sonra p = %6 *p.a.(d)* altı ay vadeli olduğuna göre 12 yıl önce ne kadar para yatırılmıştır? Hem mevduatlar, hem kiralar dönem başıdır.

3*. Üç yıl önce başlayarak iki yıl boyunca banka hesabımıza her ay dönem başı 2000 denar tutarında mevduat yatırmaya başladık. Bir yıl önce daha 40 000 denar yatırıldı. Bu günden bir yıl sonra 5 yıl boyunca R tutarında dönem başı aylık kira alacağız ve bu günden 6 yıl sonra bir yıl boyunca 2200 denar tutarında dönem başı aylık kira alacağız. Faiz oranı %13 *p.a.(d)* olduğuna göre beş yıllık kira tutarı ne kadar olacaktır? Faizlendirme bir aylık vadelidir.

4*. Bir kişi 30 yıl önce başlayarak onuncu yıl önceye kadar her ay başında %24 *p.a.(d)* faiz oranıyla aylık vadeli 1100 denar tutarında mevduat yatırmıştır. O günden sonra faiz oranı %4 *p.a.(d)* altı ay vadeli faizlendirme uygulanmıştır. Bu günden başlayarak ilerdeki 15 yıl boyunca, kişi her altı ayda kira alıp son kirayı aldıktan sonra hesabında 50 000 denar kalıyorsa yarıyıl vadeli kira tutarı ne kadardır?

5*. Biri yedi yaşından 15 yaşına kadar her üç ayın başında banka hesabına 7000 denar yatırmıştır. 20. yaşında bir defaya mahsus daha 200 000 denar para yatırmıştır. 30 ve 40 yaş arasındaki dönemde her üç ay başında 125 000 denar tutarında kira almıştır. Faiz oranı %8 *p.a.(d)* üç ay vadeli olduğuna göre, ellinci yılında şahsın banka hesabında ne kadar parasal varlığı olacaktır?

8. 11. Alıştırmalar

1. Bu günden başlayarak 1 yıl ve 8 ay boyunca her ay başında 1200 denar tutarında mevduat yatıracağız. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* aylık vadeli faizlendirme ile bu günden üç yıl sonra hesabımızda ne kadar para birikecektir?

2. İki yıl önce banka hesabımıza 40 000 denar para yatırdık. Şimdiden 4 yıl sonra hesabımızda 800 000 denar birikmesi için, ilerdeki üç yıl boyunca her ay sonunda ne kadar mevduat yatırmalıyız? Faiz oranı %18 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

3. 4500 denar tutarında üç ay vadeli kaç mevduat yatırmalıyız ki, son mevduattan 3 ay sonra hesabımızda 120 000 denar para birikmiş olsun? Faiz oranı %10 ve faiz vadesi üç aylıktır.

4. Bir kişi 35 yaşından başlayarak 41 yaşına kadar her altı ay sonunda 6 000 denar tutarında para banka hesabına yatırıyor ve son yatırım gününde hesabında 144 000 denar olduğunu tespit ediyor. Faizlendirme altı aylık olduğuna göre, yatırım hangi faiz oranıyla yatırılmıştır?

5. Biri, banka hesabına her üç ay başında 6000 denar tutarında mevduat yatırmış ve bugünden 4 yıl sonra hesabında 314 422 denar para birikmiştir. Bugün dahil, kişi kaç yıl hesabına üç ay vadeli 6000 denar tutarında para yatırmıştır? Faiz oranı %6 *p.a.(d)* ve faizlendirme üç ay vadelidir.

6. 20 yıl boyunca çeyrek yıl vadeli dönem sonu 7200 denar tutarında kira almak için bugün hangi miktar parayı yatırmalıyız? Faiz oranı %8 *p.a.(d)* ve faizlendirme üç ay vadelidir.

7. Bu günden başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca, her ay sonunda 2 500 denar tutarında mevduat yatırılıyor. Bu günden 4 yıl sonra başlayarak ilerdeki iki yıl boyunca her ay başında ne kadar kira alabiliriz? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

8. Bugün hesabımıza 100 000 denar para yatırdık. Altı aylık vadeli dönem başı 10000 denar tutarında kirayı bugünden başlayarak kaç defa alabiliriz? Faiz oranı %5 *p.a.(d)* altı aylık vadelidir. Kira kalanı ne kadardır?

9. Bugün 115 610 denar yatırdık ve bir ay sonra başlayarak, ilerdeki iki yıl boyunca her ay sonunda 9000 denar tutarında kira almaya başlayacağız. Faizlendirme aylık vadeli olduğuna göre faiz oranı ne kadardır?

10. Bugün hangi miktar parayı yatırmalıyız ki, 5 yıl sonra hesabımızda 59008 denar paramız kira sermayesi olarak birikmiş olsun. Bu paradan 3 yıl boyunca her üç ay sonunda 1200 denar tutarında kira ödenecektir.

11*. 10 yıl önce banka hesabımıza 50 000 denar para yatırdık. Dört yıl sonra her ay başında 800 denar tutarında 6 yıl boyunca periyodik yatırımlara başladık. Bugünden başlayarak 2 yıl boyunca her ay başında 3000 denar tutarında aylık kira alacağız. Son kiradan yarım yıl sonra hesabımızdan daha 197650 denar alıyoruz. Bu günden 3 yıl sonra banka hesabımızda ne kadar paramız kalacaktır? Faiz oranı %10 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

12*. Bir baba çocuğunun tasarruf karnesine, 8 yaşından 15 yaşına kadar her ay sonunda 500 denar yatırıyor; 18 yaşından 24 yaşına kadar her ay başında 600 denar yatırıyor. Ondan sonra 26 yaşından 1,5 yıl boyunca her ay başında 250 denar yatırıyor. Faiz oranı %10 *p.a.(d)* aylık vadeli olduğuna göre, son yatırımdan altı ay sonra çocuğun karnesinde ne kadar parası olacaktır?

13. On iki yıl önce bir miktar para yatırılmış ve bugün 30 000 denar çekilmiştir. Bugünden başlayarak ilerdeki 6 yıl zarfında, her dört ay sonunda 500 denar tutarında para yatırılmıştır. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* dört ay vadelidir. Bu günden 12 yıl sonra hesabımızda 208790 denar olduğuna göre, 12 yıl önce ne kadar para yatırılmıştır?

14. Birkaç yıldan bugüne kadar her üç ay başında 12000 denar para yatırılmıştır ve bugünden dört yıl sonra banka hesabında 175400 denar birikmiştir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)* üç ay vadelidir. Paranın yatırılması kaç yıl önce başlamıştır?

15. Biri 80 000 denar para yatırmıştır. 2,5 yıl sonra her üç ay başında kira almaya başlayacaktır. 2,5 yıl boyunca ne kadar kira alabilir? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* üç ay vadelidir.

16*. Bugünden bir yıl üç ay sonra, hangi miktar parayı yatırmalıyız ki, yatırım gününden bugünden 3 yıl sonraya kadar, her ay sonunda 4500 denar tutarında kira alınsın ve son kira alındığı günde hesapta 11250 denar para kalsın? Faiz oranı %12 *p.a.(d)* aylık vadelidir.

17*. Biri 5 yıl önce 24 000 denar yatırmış ve bugünden ilerdeki iki yıl boyunca her altı ay başında 38 330 denar para yatıracaktır. Faiz oranı daima aynı altı aylık vadeli olmak üzere, son yatırımda hesapta 400 000 denar biriktiğini varsayarsak, bu günden 5 yıl sonra kişinin hesabında ne kadar parası olacaktır?

18*. Bugün banka hesabına 150 000 denar yatırılmış, iki yıl sonra da 60 000 denar hesaptan çekilmiştir. Bugünden onuncu yıla kadar, dönem sonu yıllık kira alacağız ve son kiradan 3 yıl sonra hesabımızda 30 000 denar kalacaktır. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* yıllık vadeli olduğuna göre kira tutarı ne kadardır?

Konu Özetleri

Basit ve bileşik faiz hesaplarını uygularken, sadece bir defaya mahsus olmak üzere yatırılan parasal varlıklar ve bazı örneklerde farklı periyotlarda yatırılan ya da çekilen tutarlar söz konusuydu. Bu durumda, bireysel yatırımlar eşit ya da farklı olabilirdi, belli bir kurala göre değişebilir, örnek aritmetik ya da geometrik dizisi kanununa göre artar ya da azalabilir veya tasarrufta olduğu gibi belli bir kanuna uymadan gelişigüzel değişebilir. Halbuki, çok kez yatırımlar belli bir kanuna göre, aynı zaman aralıklarında tekrarlanabilir yatırımlara rastlıyoruz. Böyle durumlarda söz konusu **mevduattır.** Mevduat belli bir süre sonunda veya istenildiğinde çekilmek üzere bankalara faizle yatırılan paradır. Mevduatlar belli sürelerde aynı miktarlarda yatırıldığı durumda sabit mevduatlar diye de adlandırılıyorlar.

Yatırımlar, ödemeler serisinin başlama noktasına göre **dönem başı** ve **dönem sonu mevduatlar** olarak ikiye ayrılıyorlar. Yatırım esnasında her mevduatın faizi, yatırıldığı günden tüm mevduatların toplam değerinin hesaplandığı ana kadar hesaplanır. Dönem başı ya da dönem sonu faizlendirme uygulanabilir. Mevduat vadesi ve faiz vadesi bazı durumlarda aynı, bazı durumlarda ise farklı, yani mevduat vadelerinden daha sık ya da daha seyrek olabilirler. Pek sık tüm mevduatların toplam değeri ne kadardır sorusu sorulmaktadır. Yatırım esnasında faizi hesaplanmış tüm mevzuatların toplamına yatırımın **gelecekteki değeri** denir.

Biz burada sadece faiz dönemleriyle çakışık olan, bireysel periyodik mevduatları ve aynı zamanda sabit mevduatlı olan yatırımları inceleyeceğiz.

Yıl esnasında sadece bir mevduat ödendiği durumda, söz konusu **yıllık mevduat** olur, yatırım yılda iki defa yapıldığında, **altı aylık (yarım yıllık) mevduat**, yılda dört defa yatırım yapıldığında **üç aylık (çeyrek yıllık) mevduat** biçiminde adlandırılır. Yatırım ayda bir yapılırsa **aylık mevduat** olur. Burada da faizlendirme vadesi yıllık, altı aylık, üç aylık vb. olabilir.

Dönem başı faizlenmiş yatırımların toplamı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{S_n = V\rho\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

Dönem sonu faizlenmiş yatırımların toplamı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{S_n = V\dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

Dönem başı faizlenmiş yatırımların değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V = S_n \dfrac{r-1}{r\left(r^n - 1\right)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{V = S_n \dfrac{\rho - 1}{\rho\left(\rho^n - 1\right)}}$ dönem başı faizlendirme.

Dönem sonu faizlenmiş yatırımların değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V = S_n \dfrac{\rho - 1}{\rho^n - 1}}$ dönem başı faizlendirme.

$\boxed{V = S_n \dfrac{r - 1}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlendirme için,

Dönem başı yatırımların sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{Vr + S_n(r-1)}{Vr}}.$$

Dönem sonu yatırımların sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{V + S_n(r-1)}{V}}.$$

Son mevduat diğerlerinden farklıdır ve ona **yatırımın kalanı** denir.
Dönem başı mevduatların son mevduatı (kalanı) şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V_0 = \dfrac{1}{\rho} S_n - V\dfrac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ dönem başı mevduatlar için,

$\boxed{V_0 = S_n - V\dfrac{\rho^n - \rho}{\rho - 1}}$ dönem sonu mevduatlar için.

Dönem sonu mevduatların son mevduatı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{V_0 = \dfrac{1}{r} S_n - V\dfrac{r^n - r}{r - 1}}$ dönem başı mevduatlar için,

$\boxed{V_0 = S_n - V\dfrac{r^n - r}{r - 1}}$ dönem sonu mevduatlar için.

Dönem başı yatırımların, dönem sonu faizlendirmesiyle biriken gelecekteki değeri hesaplamak için kullandığımız $S_n = Vr\frac{r^n - 1}{r - 1}$ formülünde, S_n ve V bilindiğinde, bilinmeyen r faiz katsayısını, yani %p $p.a.(d)$ değerini hesaplamak için

$$\boxed{r^{n+1} - \left(\frac{S_n}{V} + 1\right)r + \frac{S_n}{V} = 0}.$$

denklemi elde edilir. Bu ise r katsayısına göre bir polinom denklemidir ve genel olarak derecesi 3'ten büyüktür. Bu gibi denklemleri çözmek için (bazı özel durumlar hariç), belli bir kural yoktur. Bu nedenle, bu gibi denklemleri bilinen bazı numerik yöntemlerle çözeceğiz. Halbuki, amacımız şimdi numerik yöntemlerin denklemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmek değildir. Burada sadece pratik ödevlerin yararına faiz oranını en kolay biçimde belirtmektir. Bu nedenle faiz oranının hesaplanmasını $i\ /\ i$ tablolarındaki değerleri kullanan $S_n = V \cdot III_p^n$ formülüne göre yapacağız.

Aynı işlemleri dönem sonu yatırımlar için de yapacağız. Yatırımların gelecekteki değeri $S_n = V\frac{r^n - 1}{r - 1}$ formülünden, faiz katsayısı r için:

$$\boxed{r^n - \frac{S_n}{V}r + \frac{S_n}{V} - 1 = 0},$$

denklemi elde edilir. Bu denklem de r değişkenli polinomdur. Yatırımların gelecekteki değerini hesaplamak için $i\ /\ i$ tablolarındaki değerleri kullanan $S_n = V\left(1 + III_p^{n-1}\right)$ formülünden yararlanarak $\mathrm{III}_p^{n-1} = \frac{S_n}{V} - 1 = \frac{S_n - V}{V}$. elde edilir. n – 1'in bilinen değeri için $\frac{S_n - V}{V}$ değeri tabloda varsa, faiz oranı doğrudan doğruya okunur. Aksi halde, faiz oranını doğrusal enterpolasyon ile belirtiyoruz.

Eşit zaman aralıklarında alınan alacaklar söz konusu olunca ilk aklımıza gelen **kiradır**. Eşit miktarda alacakları **sabit kiralar** (**rentler**) diye adlandıracağız. Kira anüiteleri önceden belirlenmiş kanuna göre değişebilir, örneğin geometrik ya da aritmetik dizisi kanununa göre değişebilir. Böyle kiralara **değişken kiralar** denir. Özelliklerine göre kiralar birçok şekilde adlandırılıyorlar; ödeme zamanına göre, periyodun başlangıcında ödenirse **dönem başı kiralar**, periyodun sonunda ödenirse **dönem sonu kiralar** diye adlandırılıyorlar. Ödemelerin zaman süresine göre **geçici kiralar** (belli bir süre için), **ömür boyu kiralar** (kirayı ödeyen kişinin ömrünün sonuna kadar), ya da kira alacakları hiç bitmeyen olduğu durumda **daimi kiralar** söz konusudur. Kiraların ödendiği periyoduna göre: **yıllık, yarıyıllık, üç aylık, aylık** vb. kiralar fark ediyoruz.

Kira almak için, önce bunu getirecek varlık temin edilmelidir. Kira getirmek amacıyla yatırılan varlık miktarına **kira sermayesi** denir. Burada bir defaya mahsus olan yatırım söz konusudur. Halbuki parasal varlıklar periyodik ödemelerle de yapılabilir. Kira alacakları, kira bedelinin yatırılmasıyla başlarsa **hemen kiralar**, kira alacakları belli bir zamandan sonra başlarsa o halde **ertelenmiş kiralar** söz konusu olur.

Sabit miktarlı, faizlendirme vadesi kiranın ödeme vadesiyle çakışan periyodik ödemeler üzerinde daha fazla duracağız. Formüllerin belirtilmesinde faiz oranı dönem sonu olduğunu varsayacağız. Şu işaretlemeleri kullanacağız: M_n – kira sermayesi, R- kira (rent), n – ödeme sayısı, r – dönem sonu faiz katsayısı, ρ - dönem başı faiz katsayısı.

Dönem başı kiraların yatırımı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho-1)}}$ dönem başı faizlendirme için.

Dönem sonu kiraların yatırımı şu formülle hesaplanır:

$\boxed{M_n = R\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ dönem sonu faizlendirme için,

$\boxed{M_n = R\frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho-1)}}$ dönem başı faizlendirme için.

Faiz yatırımının değeri M_n, faizlendirme koşulları ve kira sayısı bilindiği durumda, kira tutarının değeri şu formülle hesaplanır:

$\boxed{R = M_n\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlenen dönem başı alınan kira için,

$\boxed{R = M_n\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$ dönem sonu faizlenen dönem sonu alınan kira için.

$\boxed{R = M_n\frac{\rho^{n-1}(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$ dönem başı faizlenen dönem başı alınan kira için,

$\boxed{R = M_n\frac{\rho^n(\rho-1)}{\rho^n - 1}}$ dönem başı faizlenen dönem sonu alınan kira için.

Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, dönem başı kira sayısı şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{Rr}{Rr - M_n(r-1)}}$$ dönem sonu faiz oranı için,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R\rho}{R\rho - M_n(\rho-1)}}$$ dönem başı faiz oranı için.

Kira sermayesi, kira tutarı ve faiz oranı bilindiğinde, dönem sonu kira sayısı da şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(r-1)}}$$ dönem sonu faiz oranı için,

$$\boxed{n = \frac{1}{\log \rho} \cdot \log \frac{R}{R - M_n(\rho-1)}}$$ dönem başı faiz oranı için.

Son kira, yani kira kalanı dönem sonu kiralar için şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{R_0 = \left[M_n - R \cdot \frac{r^{n-1} - 1}{r^{n-1}(r-1)} \right] \cdot r^n}.$$

Diğer büyüklükler bilindiğinde, faiz katsayısı dönem başı kira için $M_n = R\left(1 + IV_p^{n-1}\right)$ formülünden ve dönem sonu kiralar için $M_n = R \cdot IV_p^n$ formülünden bilinmeyen gibi hesaplanabilir.

9 BORÇLAR

9.1. Borç Kavramı ve Çeşitleri

Finansal varlıkların yetmediği durumlarda, insanlar günlük gereksemelerini gidermek için borç varlıklardan yararlanıyorlar. Bazı durumlarda bireysel ya da tüzel kişilerin uzun vadeli gelirleri de planladığı işleri yapmak için gereken finansal kaynakları yetmeyebilir. Böyle durumda **borçlar** kullanılır, yani belli koşullar altında borç alınan finansal varlıklardan yararlanılır. Borç veren ve alan, borç miktarı, geri verilme şekli, geri ödeme zamanı, faiz oranı vb. hususlarda aralarında anlaşıyorlar.

Borç, para, mal veya para cinsinden bir değerin belirli bir vade ve koşulla geri alınmak üzere verilmesidir, yani borç veren, finansal varlıklarını borç alana geçici bir süre için hizmetine devretmesidir.

Bu bölümde, borçlunun borcunu ödeme koşulları, borç verene olan yükümlülüğü, yani finansal varlıkların devredilme koşulları, borcun süresinde faizlendirmeyi içeren, anlaşmalar söz konusu olacaktır. Borç tutarı genellikle birden verilir ve geri alınması birden değil, çok kez belli periyotlarda gerçekleştirilir. Her periyotta borcun ödendiği tutara **ödeme** denir. Belli periyotta ödemenin faiziyle beraber tutarına **anüite** denir; diğer sözlerle anüite, belirli bir zaman süreci içerisinde, eşit aralıklarla verilen veya alınan eşit ödemeler serisidir. Borcun her bireysel ödemesine gereken zaman süresine **amortisman vadesi** denir.

Kullanılışlarına göre, geçerlilikte olan kanunlara göre, süresine göre birçok borç çeşitleri vardır.

- Geri ödenme süresine göre **kısa vadeli** (geri ödeme süresi en çok bir yıl), **orta vadeli** ve **uzun vadeli** diye adlandırılıyorlar;
- Ödeme şekline göre borçlar, **amortismanlı** ve **kiralı** olabilirler. Borç belli bir sürede faiz ve borcun bir kısmını ödemekle geri ödeme yapıldığı durumda, amortismanlı borç söz konusu olur. Kiralı borçlar ise, kira şeklinde ödenen sabit tutarlı taksitler halinde ödenen borçlardır.
- Güvenceye göre, **kişisel** ve **reel** borçlar olabilir. Kişisel borçlar, borç verenin borç alana olan şahsi güvencesine göre verilir. Reel borçlar ise, borcun ödenmesini garantileyecek, örneğin ipotek gibi varlıklar güvencesiyle verilir.
- Borç verene göre **yerli** ya da **yabancı** borçlar, **aleni** ya da **özel**, **banka** ya da **banka dışı** vb. borçlar olabilir.
- Borç üzerine faizin ödenip ödenmediğine göre, **faizli** ve **faizsiz** borçlar şeklinde adlandırılabilir.

- Borçlanmaya ait verilen belgelere göre, borçlar **sözleşmeli** (borç tutarının tümü için bir belge) ve **tahvillere (senetlere) bölünmüş borçlar** (birden fazla alacaklıya, aynı ya da farklı tutarlı kısımlara ayrılmış fakat onların toplam tutarı tüm borç ile eşit olacaktır) olabilir.
- Anüitelerin ödeme süresine göre, **dönem sonu anüiteli** borçlar (ödemeler serisi devrenin sonunda yapılan) ve **dönem başı anüiteli** borçlar (ödemeler devrenin başında yapılan anüiteler) olabilir.
- Faizin hesaplanmasına göre borçlar, **dönem sonu faizlenen** ve **dönem başı faizlenen** biçiminde adlandırılabilir.

Mevduatlarda ve kiralarda olduğu gibi borçlar da, dönem sonu anüiteli ve dönem başı faizlendirme, dönem sonu anüiteli dönem sonu faizlendirme biçiminde olabilir. Aynı şekilde dönem başı anüiteler için de dönem sonu ve dönem başı faizlendirme biçiminde olabilirler.

Borçların amortismanı birçok farklı şekilde yapılabilir. Uzun vadeli borçlarda vade süresince sadece faizlerin, vadenin sonunda da borcun tamamını bir defada ödemek, ya da her bir taksit hem anaparanın bir bölümünü hem de ilgili devrelerin faizini içerir.

Şunu da belirtelim, **borcun amortismanı** denilen kademeli ödemede, önceden belirlenmiş tutarlarla, belli zaman aralıklarında, önceden belirlenmiş bir plan üzerinde ödenmesine **amortisman planı** denir. Halbuki amortisman planını yapmak için, bazı verilerin kesin bilinmesi gerekir. Mesela hangi zamanda ne kadar ödenmesi gerektiğini, borcun ne kadarı kaldığını, ne kadar faiz hesaplandığını bu verilerin her biri nasıl hesaplanacağını da belirtmek gerekir.

Ödemeler ve anüiteler sabit ya da belli bir kurala göre, örneğin aritmetik ya da geometrik dizisi kuralına göre değişen olabilir. Biz şimdilik, sabit anüiteli borçları inceleyeceğiz. Çünkü bunlar pratikte daha sık rastlanan ve borcu ödeme süresinde belli aralıklarda taksitlere ayırarak ödenmesi borçluya daha elverişlidir. Borç eşit ödemelerle tahsil edildiği durum borçluya pek elverişli değildir, çünkü borcu aldığı anda, büyük anüite ile ödemeye başlaması gerekir. Faizlendirme vadesi de anüitenin ödeme vadesiyle çakışabilir ya da çakışmayabilir de.

İlerde sadece eşit anüiteli borçları ve yuvarlanmış anüiteli borçları ve her iki durumda dönem sonu anüiteleri ve dönem sonu faizlendirmesi yapılan ve faizlendirme vadesi ve amortisman vadesiyle çakışan borçları inceleyeceğiz. Diğer durumlar benzer şekilde hesaplanacaktır.

Sonunda, tüm bireysel anüitelerin iskontolanmış değerlerinin toplamı, borcun alındığı gündeki değerine eşit olduğunu diyebiliriz. Bu ise kiralarda kira sermayesinin hesaplandığını hatırlatıyor. Bu sonuçtan yararlanarak, amortisman planındaki büyüklüklerin nasıl hesaplanacağını artık biliyoruz.

Alıştırmalar

1. Ödeme nedir, anüite nedir, amortisman vadesi nedir?

2. Borçların nasıl ayrıldığına dair dört kriter sayınız?

3. Borcun süresine göre borçlar nasıl ayrılır, ödeme şekline göre ise nasıl ayrılırlar?

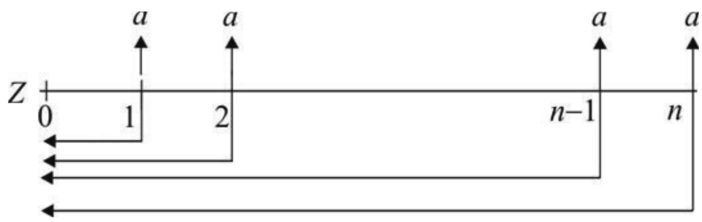
4. Amortisman planı nedir?

5. Bireysel ve reel borçlar arasındaki fark nedir?

6. Amortisman ve kira borçları arasındaki fark nedir?

9.2. Eşit Anüiteli Borçlarda, Borcun ve Anüitenin Hesaplanması

Tutarı Z olan bir borç alınmış ve geri ödemesi, her biri a tutarında n eşit anüite ile yapılacaktır. Faiz oranı p dönem sonu faizlendirme ve faiz dönemi anüitelerin ödeme dönemiyle çakışık olsun. Dönem sonu faiz katsayısı r, her faiz dönemi için ayrı hesaplanmış, yani etkin faiz (efektif faiz) yapılmıştır. Borcun alındığı günde, borcun tutarı, her dönemin sonunda ödenen, bireysel anüitelerin iskontolanmış değerlerinin toplamına eşittir. Sayı ekseninde, kira sermayesinin hesaplandığında, kiralarda yapıldığı gibi, her anüitenin ödeme dönemi (periyodu) işaret edilir (şek.1).



Şek. 1

İskontolama kurallarıyla, anüitelerin değerleri bilindiğine göre borcun tutarını hesaplayalım. Birinci anüite ilk devrenin (periyodun) sonunda ödendiğine göre bir devre için faizlenir, ikincisi iki devre için ve bu şekilde sonuna kadar devam edilerek son anüite n defa faizlenir. Bu şekilde:

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a}{r^n} = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}\right).$$

elde edilir.

Parantez içindeki ifade, ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan bir geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamıdır. O halde,

$$Z = \frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{a}{r}\frac{\frac{r^n-1}{r^n}}{\frac{r-1}{r}}, \text{ ve } \boxed{Z = a\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}}.$$

elde edilir.

Not 1. Kiralar bölümünde gördüğümüz gibi, $\frac{r^n-1}{r^n(r-1)}$ ifadesi i/i, IV_p^n dördüncü tablonun değeriyle değiştirilebilir. O halde, anüiteleri bilinen borcu $\boxed{Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n}$, formülüyle hesaplayabiliriz. Bu formül kiraların sermayesini hesapladığımız formülün aynısı olduğunu görüyoruz.

Aynı formülden, anüiteye göre denklem biçiminde çözersek, borç tutarı bilindiğinde anüitenin hesaplanması için formül elde edebiliriz:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}}.$$

Not 2. $i\ /\ i$ tablolarının değerlerinden yararlanarak anüite için $a = \frac{Z}{IV_p^n}$ formülü elde edilir. Beşinci $i\ /\ i$ tablo dördüncüsünün çarpımsal tersi olarak tanımlanır, $V_p^n = \frac{1}{IV_p^n}$, yani $V_p^n = \frac{r^n(r-1)}{r^n-1}$ dir. Buna göre anüite için $\boxed{a = Z \cdot V_p^n}$. formülü geçerlidir.

1. 5 000 denar tutarında aylık eş anüitelerle beş yılda, bir ay vadeli dönem sonu %24 *p.a.(d)* faiz oranıyla ne kadar borç ödenebilir?

Ödevde verilen verilere göre, $n = 5$ ve yılda $m = 12$ faizlendirme ve yılda aynı sayıda borç ödeme taksitleri vardır. O halde toplam taksit sayısı $nm = 60$, dönem sonu faiz katsayısı $r = 1 + \frac{24}{12 \cdot 100} = 1,02$'dir. Borcu hesaplayan formül gereğince $Z = a\frac{r^{60}-1}{r^{60}(r-1)} = 5000 \cdot \frac{1,02^{60}-1}{1,02^{60}(1,02)-1} = 173804,43$ denar elde edilir. ♦

Bundan sonra, m ile yıllık faizlendirme sayısını işaret ettiğimiz gibi, aynısı anüite sayısı için de geçerli olacaktır. Çünkü amortisman devreleri, başlangıç koşullarına göre anüite sayısıyla çakıştığını demiştik ve n ile amortisman süresini işaret edeceğiz.

2. 40 000 denar tutarında borç, altı aylık vadeli anüitelerle %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10 yılda ödeniyor. Faizlendirme altı aylık vadeli olduğuna göre, altı aylık vadeli anüite tutarı ne kadardır? Hesaplanan faiz tutarı ne kadardır?

Verilenler: $n = 10$, $m = 2$, anüite devreleri altı aylık olduğuna göre toplam anüite sayısı $nm = 20$'dir. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{4}{200} = 1,02$'dir. Borç tutarı $Z = 40\ 000$ denar biliniyor. Amortisman süresinde eşit olan anüiteler için

$$a = Z\frac{r^{20}(r-1)}{r^{20}} = 40000\frac{1,02^{20}(1,02-1)}{1,02^{20}} = 2447,27 \text{ denar elde edilir.}$$

Hesaplanan faiz miktarı, ödenen anüitelerin toplamı ve borç tutarının farkına eşittir. O halde $I = nm \cdot a - Z = 20 \cdot 2447,27 - 40000 = 8945,4$ denardır. ♦

Amortisman süresinde hesaplanan faiz miktarının formülü, $I = nm \cdot a - Z$ anüitelerin toplam tutarı ve borç tutarının farkı biçiminde gösterildiğini fark edebilirsiniz.

3. 2 000 000 tutarinda bir borç, 10 yılda %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla eşit anüiteli serisiyle ödenir. Ödeme vadesi

a) yarıyıllık; b) üç aylık

olduğuna göre, anüite tutarını hesaplayınız.

Faizlendirme dönemi, amortisman dönemiyle çakışıktır.

Her iki durumda $Z = 2\ 000\ 000$ denar, $n = 10$'dur.

a) Ödevi sadece dördüncü i / i tablosundan yararlanarak çözeceğiz. Böylece,

$a = Z \cdot V_3^{20} = 2000000 \cdot 0,06721571 = 134431,42$ elde edilir.

Doğrudan hesaplayarak ve i / i tablosundan yararlanarak çözümün yoklamasını yapınız.

b) $m = 4$ için $r = 1 + \frac{6}{400} = 1,015$, ve anüite sayısı 40 biliniyor. O halde

$$a = Z\frac{r^{40}(r-1)}{r^{40}} = 2000000\frac{1,015^{40}(1,015-1)}{1,015^{40}} = 66854 \text{ denardır. ♦}$$

Alıştırmalar

1. Sekiz yıl boyunca %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla 15000 denar tutarlı eşit anüiteli ödemelerle ne kadar borç ödenebilir? Faizlendirme vadesi amortisman devresiyle çakışır. Anüitelerin ödeme devresi:

a) yıllık; b) yarıyıllık; c) üç aylık olsun.

Hesaplamayı formül kullanarak doğrudan ve i / i tablosunu kullanarak yapınız.

2. Dört yıl boyunca %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 10000 denar tutarlı eşit anüiteli ödemelerle ne kadar borç ödenebilir? Faizlendirme vadesi yıllık, amortisman vade sonudur.

3. 400 000 denar borç 15 yıl boyunca, her altı ayda eşit anüitelerle geri ödenmelidir. Faiz oranı %3 *p.a.(d)* ve faizlendirme altı aylık dönem sonu olduğuna göre anüite tutarı ne kadar olmalıdır?

4. Yıllık vadeli 20 000 denar tutarında anüitelerle 5 yılda %4 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz oranıyla ne kadar borç ödenecektir?

5. 50 000 denar borç, 5 yılda üç aylık %8 *p.a.(d)* faiz oranlı anüitelerle ödenecektir. Anüite tutarı ne kadardır? Faizlendirme üç aylık vadelidir.

9.3. Eşit Anüiteli Borçların Ödemelerinin Hesaplanması

Her anüite iki kısımdan olduğunu artık biliyoruz; birinci kısım, anlaşma gereği borcun ödeme miktarı, yani bir çeşit taksit, diğer kısmı ise borcun kalan kısmına geçen süre için uygulanan faizdir. Z tutarında borç alınmış ve bunu n eşit anüite ile geri çevirmek gerekir. Her anüitenin tutarı a, faiz oranı p ve dönem sonu faizlendirme, faizlendirme vadesi anüitenin ödeme vadesiyle çakışıktır. Her k-cı ödemeyi b_k ve k- cı faizi i_k ile işaret edersek birinci anüite

$$a = b_1 + i_1$$

olur. Burada faiz, birinci dönem için Z tüm borç tutarına hesaplanır, yani $i_1 = \frac{Zp}{100}$'dir.

Başlangıçta, faiz oranı bir faiz dönemi için p olarak alacağız, ondan sonra ise etkin faiz oranını kullanmaya dikkat edeceğiz.

İkinci anüite, birincisine eşit, fakat eklenen faiz miktarı farklıdır $a = b_2 + i_2$. Şimdi faiz miktarı borcun kalan kısmına aittir, o ise $Z - b_1$ olduğuna göre $i_2 = \frac{(Z - b_1)p}{100}$'dir.

Üçüncü anüite $a = b_3 + i_3$, ve $i_3 = \frac{(Z - b_1 - b_2)p}{100}$ olur, çünkü şimdiye dek artık iki ödeme yapılmıştır ve kalan borç $Z - b_1 - b_2$'dir.

Kalan anüitelerin her birini bu şekilde inceleyerek son anüiteye $a = b_n + i_n$ varıyoruz. Burada faiz borcun kalan kısmına $Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_n$ uygulanır, yani $i_n = \frac{(Z - b_1 - b_2 - \ldots - b_{n-1})p}{100}$'dir.

Ödemeler arasındaki bağıntıyı belirtmek için, birbirine eşit olan anüiteleri eşitleyeceğiz. Böylece birbirine eşit olan ilk iki anüiteyi eşitlersek $b_1 + i_1 = b_2 + i_2$ yani $b_1 + \frac{Zp}{100} = b_2 + \frac{(Z - b_1)p}{100}$ elde edilir.

Oradan $b_1 + \frac{b_1 p}{100} = b_2$ ya da diğer şekilde yazılışı:

$b_2 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 r \cdot$ dir.

Benzer şekilde, herhangi iki ardışık anüiteyi mesela, k–ci ve $k + 1$–nci anüiteleri eşitlersek:

$$b_k + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1})p}{100} = b_{k+1} + \frac{(Z - b_1 - \ldots - b_{k-1} - b_k)p}{100},$$

elde edilir. Bu eşitliği sadeleştirerek, her $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ için:

$\boxed{b_{k+1} = b_k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_k r}$, elde edilir.

Son ifadeden görüldüğü gibi, ödemeler ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı r faiz katsayısı olan bir geometrik dizisini oluşturuyorlar. Daha da, her ödeme $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$ formülüyle hesaplanabilir.

Not 1. Birinci i / i tabloyu kullanırsak herhangi ödeme için $\boxed{b_k = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^{k-1}}$ formülü geçerlidir.

1. Borç, eşit üç aylık vadeli anüite ile ve üç aylık vadeli faizlendirme ile ödenecektir (amortisman olacaktır). Dokuzuncu ödeme 2343,322 denar olduğuna göre beşinci ödemeyi belirtiniz. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir.

$b_9 = 2343{,}322$ biliniyor, b_5 ödemesinin tutarını belirtmek gerekir. Geometrik dizisinin özelliğine göre $b_5 = b_1 r^4$ ve $b_9 = b_1 r^8$'dir. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$'dir. İncelenen ödemelerin bölümleri $\frac{b_9}{b_5} = \frac{b_1 r^8}{b_1 r^4} = r^4$ olduğundan beşinci ödeme:

$b_5 = \frac{b_9}{r_4} = \frac{2343{,}322}{1{,}02^4} = 2164{,}87$ denar olduğunu buluyoruz. ♦

Birinci ödeme tutarı bilinmiyor, fakat borç yada anüite tutarı biliniyorsa; zaten günlük yaşantımızda çok sık rastlanan olaylardır, ödemeler nasıl belirlenebilir sorusu soruluyor.

Z borcunun ödemelerini belirtmek için, Z tüm ödemelerin toplamına eşit olduğunu görmemiz yeterlidir. Buna göre,

$$Z = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + b_1 r^{n-1} = b_1\left(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}\right),$$

elde edilir. Parantez içindeki ifade ilk terimi 1 ve ortak çarpanı r olan bir geometrik dizisidir. Buna göre,

$$\boxed{Z = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

elde edilir.

Not 2. $\frac{r^n - 1}{r - 1}$ ifadesini $1 + III_p^{n-1}$ ile değiştirirsek

$$\boxed{Z = b_1\left(1 + \mathrm{III}_p^{n-1}\right)}.$$

elde edilir. Bu eşitlikten $b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1}$, ödeme tutarını, borç tutarıyla, anüite sayısıyla ve faiz oranıyla ifade edebiliriz:

Bunu genel şekilde, k-cı ödeme için de yazabiliriz:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} r^{k-1}}.$$

Borç tutarını $Z = a\frac{r^n - 1}{r^n\left(r - 1\right)}$, anüite ile ifade edersek, birinci ödemeyi anüite ile ifade eden formülü elde edeceğiz:

$$b_1 = Z\frac{r - 1}{r^n - 1} = a\frac{r^n - 1}{r^n\left(r - 1\right)}\frac{r - 1}{r^n - 1}$$

ya da sonuç olarak $\boxed{b_1 = \frac{a}{r^n}}$. elde edilir.

Not 3. Son eşitlikten hemen $b_1 = a \cdot II_p^n$ ya da

$$\boxed{a = b_1 \cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

yazılabilir. Sonunda anüite ile ifade edilmiş k- cı ödeme

$$b_k = \frac{a}{r^n} r^{k-1} = \frac{a}{r^{n-k+1}}.$$

Not 4. Son eşitlik *i / i* tablosuyla ifade edilirse, k – cı ödeme için $\boxed{b_k = a \cdot \mathrm{II}_p^{n-k+1}}$ biçiminde yazılabilir.

Anüite ve son ödeme arasındaki bağıntı $b_n = \frac{a}{r} = a \cdot II_p^1$, ya da $a = b_n \cdot I_p^1$ formülleriyle ifade edildiğini de gösterelim.

2. Bir borç, yarıyıllık vadeli eşit tutarlı anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlendirmesiyle 5 yılda ödeniyor. Anüite, % 6*p.a.(d)* faiz oranıyla 4120 denar olduğuna göre altıncı ödemeyi belirtelim.

Önce birinci, ondan sonra da altıncı ödemeyi belirteceğiz. $a = 4120$ denar, $n = 5$, $m = 2$, borcun amortismanı 10 anüite ile yapıldığını ve faiz katsayısı $r = 1 + \frac{6}{200} = 1,03$ olduğunu biliyoruz. O halde ilk ödeme: $b_1 = \frac{a}{r^n} = \frac{4120}{1,03^{10}} = 3065,67$ denar olduğunu buluyoruz. Ödemeler bir geometrik dizisi oluşturduğuna göre, geometrik dizilerin özelliği gereğince altıncı ödeme $b_6 = b_1 r^5 = 3065,67 \cdot 1,03^5 = 3553,95$ denar olduğunu buluyoruz. ♦

3. Amortismanı 6 yılda gerçekleşen %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla verilmiş bir borcun anüitesi ne kadardır? Anüiteler ve faizlendirme devreleri yıllıktır ve sadece dördüncü ödeme 8479,34 denar olduğu biliniyor.

Bilinenler: dördüncü ödeme b_4 =8479,34, faiz katsayısı $r = 1,04$ ve anüite sayısı 6'dır. Anüite ve ödeme arasındaki bağıntıyı doğrudan doğruya gösteren formülden $b_4 = b_1 r^3 = \frac{a}{r^6} r^3 = \frac{a}{r^3}$ elde edilir. Örneğimizde $8479,34 = \frac{a}{1,04^3}$, denklemi elde edilir. Oradan da, anüite $a = 9538,9$ denar olduğunu buluyoruz.

Borç tutarı ise, $Z = a\frac{r^6 - 1}{r^6 (r-1)} = 9538,09 \frac{1,04^6 - 1}{1,04^6 (1,04) - 1} = 60000$ denardır. ♦

Alıştırmalar

1. Bir borcun amortismanı eşit üç aylık anüitelerle ve üç aylık dönemli faizlendirmeyle yapılmaktadır. Faiz oranı %12 *p.a.(d)* ve altıncı ödeme 15 000 denar olduğuna göre, onuncu ödemeyi belirtiniz.

2. Bir borcun amortismanı eşit dört aylık anüitelerle ve dört aylık dönemli faizlendirmeyle yapılmaktadır. Faiz oranı %9 *p.a.(d)* ve onuncu ödeme 16 000 denar olduğuna göre, anüite tutarı ne kadardır?

3. Bir borcun amortismanı 6 yılda eşit üç aylık anüitelerle ve üç aylık dönemli faizlendirmeyle yapılıyor. Faiz oranı %18 *p.a.(d)*, üçüncü ve altıncı ödemenin toplamı 40000 denardır. Borç ne kadardır? Anüite tutarı ne kadardır?

4. Amortismanı 6 yıl süren bir borç, %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla verilmiştir. Anüiteler ve faizlendirmeler vadesi yıllık ve altıncı ve dördüncü ödeme arasındaki fark 691,9 denar olduğu bilindiğine göre anüite tutarı ne kadardır?

5*. 200 000 denar tutarında bir borcun amortismanı eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlendirmeyle 10 yılda gerçekleşiyor. Faiz oranı %5 *p.a.(d)* olduğuna göre, altıncı yıldaki faiz miktarını bulunuz (Tavsiye: beşinci ödeme dahil tüm ödemelerin toplamını hesaplayınız).

9.4. Eşit Anüiteli Borçlarda Borcun Ödenmiş Kısmının ve Kalan Kısmının Hesaplanması

Ödemeleri hesaplarken, tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olduğunu varsayıyorduk. Buna göre O_k ile işaret edeceğimiz, k devrede (periyotta) borcun ödenmiş kısmı k-cı anüite dahil, ilk k ödemenin toplamına eşittir, yani:

$$O_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k,$$

dir. Her ödemenin değerini değiştirmekle,

$$O_k = b_1 + b_1 r + \ldots + b_1 r^{k-1} = b_1 (1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1}),$$

elde edilir. Geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı formülünden, borcun k devrede ödendiği borcun kısmı için şu formül elde edilir:

$$\boxed{O_k = b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}}.$$

Not 1. Üçüncü i/i tablosundaki değerleri almakla, borcun ödenmiş kısmı için $\boxed{O_k = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_p^k\right)}$ formülü elde edilir.

Anlaşılacağı üzere bu formül, borcun ödenmesiyle ilgili önceden bulduğumuz formülün $k = n$ için karşılığıdır.

Bundan sonra, borcun kalan kısmı ne kadardır, sorusu sorulabilir. Sorunun cevabı açıktır. Borcun kalan kısmı aslında, borç tutarı ve ödenen kısmın farkıdır. Ödenen *k-cı* anüiteden sonra borcun kalan kısmını R_{n-k} ile işaret edelim. O halde,

$$R_{n-k} = Z - O_k = Z - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}.$$

olduğunu yazabiliriz. Birinci ödemeye göre borcun formülünü değiştirirsek

$$R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} - b_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}, \text{ ya da}$$

$$\boxed{R_{n-k} = b_1 \frac{r^n - r^k}{r - 1}}.$$

elde edilir. Borcu ve borcun kalan kısmını anüite ile ifade edersek

$$R_{n-k} = a \frac{r^n - 1}{r^n (r - 1)} - \frac{a}{r^n} \frac{r^k - 1}{r - 1}, \text{ yani } \boxed{R_{n-k} = a \frac{r^n - r^k}{r^n (r - 1)}} \text{ elde edilir.}$$

Not 2. $\dfrac{r^n - r^k}{r^n(r-1)}$, ifadesini i / i tablosundan karşılık gelen değerini değiştirmekle, ödenen k anüiteden sonra borcun kalanını hesaplamak için şu formül geçerli olacaktır:

$$\boxed{R_{n-k} = a \cdot \mathrm{I}V_p^{n-k}}.$$

1. 30 000 denar borç 8 yılda amortisman olacaktır. Faiz oranı %5 *p.a.(d)*, eşit anüiteli ve faizlendirme yarıyıllıktır. 10 anüite ödendikten sonra borcun kalanı ne kadardır?

Borç, toplam 16 anüite ile ödeniyor. Faiz katsayısı r = 1,025'tir. Önce anüiteyi ve ilk ödemeyi hesaplayalım. Anüite için:

$$a = 30000\frac{1{,}025^{16}(1{,}025-1)}{1{,}025^{16}-1} = 2297{,}97$$

denar elde edilir. Birinci ödeme için ise:

$$b_1 = \frac{a}{r^{16}} = \frac{2297{,}97}{1{,}025^{16}} = 1547{,}97$$

denar elde edilir. Şimdi borcun kalanını hesaplayabiliriz:

$$R_6 = b_1\frac{r^{16}-r^{10}}{r-1} = 1547{,}97\frac{1{,}025^{16}-1{,}025^{10}}{1{,}025-1} = 12657{,}5$$

denar elde edilir.

Hesaplanan kalandan, borcun ödenmiş kısmını da hesaplayabiliriz. Buna göre,

$O_{10} = Z - R_6$ = 30 000 – 12657,5 = 17342,5 denar artık ödenmiştir. ♦

2. 100 000 denar tutarında borcun amortismanı 50 yılda yapılmalıdır. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yıllık vadelidir. Yıllık 20 anüite ödendikten sonra kalan borç ne kadardır?

Örneğin, i / i tablolarından yararlanarak çözelim. Borcun kalanını ve ödenmiş kısmını hesaplayacağız. Borcun kalanı için $R_{30} = a \cdot IV_4^{30}$ geçerlidir. Önce anüiteyi hesaplayalım.

Anüite, $a = Z \cdot V_4^{50} = 100000 \cdot 0{,}046552 = 4655{,}2$'dir. İlk ödeme ise,

$b_1 = a \cdot \mathrm{II}_4^{50} = 4655{,}2 \cdot 0{,}140707 = 655{,}02$'dir. Borcun kalan kısmı

$R_{30} = a \cdot \mathrm{I}V_4^{30} = 4655{,}2 \cdot 17{,}292033 = 80494{,}75$ denardır ve sonunda çevrilen borcun

$O_{20} = b_1 \cdot \left(1 + \mathrm{III}_4^{20}\right) = 655{,}02 \cdot 29{,}77807857$ olduğunu buluyoruz.

Alıştırmalar

1. Bir borcun amortismanı 40 yılda, yarıyıllık anüitelerle ve %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla yarıyıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. Yirminci ödeme 1000 denar olduğuna göre, 30 anüite ödendikten sonra borcun kalan kısmını belirtiniz.

2. 200 000 denar tutarında borcun amortismanı 25 yılda, yarıyıllık anüitelerle ve %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla yarıyıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. 21. anüiteden 30. anüiteye kadar (30. anüite dahil) ne kadar borç ödenmiştir? (O_{30} – O_{20} farkını bulunuz).

3. Bir borcun amortismanı 40 yılda, yıllık anüitelerle ve %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla yıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. İlk 25 ödemeyle borç 40 000 denar azalmıştır. Borç tutarı ne kadardır?

4. Bir borcun amortismanı 50 yılda, yıllık anüitelerle ve %5 *p.a.(d)* faiz oranıyla yıllık vadeli faizlendirmeyle yapılacaktır. 21. anüiteden 30. anüiteye kadar (30. anüite dahil) 10 000 denar borç ödendiğine göre, borç tutarı ne kadardır?

5. 1 000 000 denar tutarında borcun amortismanı 20 yılda, eşit yarıyıllık vadeli anüitelerle yapılacaktır. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yarıyıllık vadeli faizlendirme olduğuna göre 10 yıl sonra borcun ne kadar kısmı ödenecektir?

9.5. Eşit Anüiteli Borçların Amortismanında Faiz Oranı ve Devre Sayısının Hesaplanması

Borç ve anüitenin hesaplanmasına uygulanan formülden, faiz oranı ya da devre sayısı bilinmeyen olarak diğer bilinen büyüklüklerle ifade edilebilirler. Kiralarda yapıldığı gibi, formülle doğrudan doğruya hesaplamakla ya da *i / i* tablolarından yararlanmakla yapabiliriz. Bunu birkaç örnekle göstereceğiz.

Başlangıç formülü olarak, borç formülünü alalım. $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, formülüne gereken dönüşümleri yapmakla:

$$\frac{Z(r-1)}{a} = 1 - \frac{1}{r^n},$$

elde edilir, oradan da

$$\frac{1}{r^n} = \frac{a - Z(r-1)}{a}, \text{ ya da } r^n = \frac{a}{a - Z(r-1)}.$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının logaritmasını alırsak, amortisman süresi n için

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a - Z(r-1)}}.$$

formülü elde edilir.

Faiz oranının hesaplanması söz konusu olunca, yöntemlerden biri, dördüncü *i* / *i* tablosundan $\boxed{Z = a \cdot \mathrm{I}V_p^n}$, borcun temel formülünden yararlanmaktır. Halbuki, formüllerden yararlanırken, uygun denklem elde edildiğinde, doğrudan doğruya da hesaplayabiliriz.

Doğrusal ara değerleme (enterpolasyon) yöntemini şimdiye dek birçok defa kullandık, şimdi de gerektiği durumda kullanabiliriz.

Ödevlerde verilen verilere bağlı olarak, yukarıdaki formülleri kullandığımız gibi, amortisman süresini ve faiz oranını hesaplamada, gerektiğinde diğer formüller de kullanılabilir.

1. 60 000 tutarında bir borç, 4000 denar tutarında eşit yıllık anüitelerle, yıllık vadeli %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ödemelerle ne kadar zamanda amortisman olacaktır (ödenecektir)?

Borcun hesaplanması için kullanılan $Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$ formülünde verilen değerleri değiştirerek ve logaritma işlemini uygulayarak doğrudan doğruya hesaplamayı yapabiliriz. Yani $60000 = 4000\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n(1{,}04 - 1)}$, değiştirmekle $\dfrac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} = 0{,}6$, buradan da $0{,}4 \cdot 1{,}04^n = 1$ ya da $1{,}04^n = 2{,}5$ denklemi elde edilir. Denklemin iki tarafının logaritmasını almakla $n = \dfrac{\log 2{,}5}{\log 1{,}04} = 23{,}36$ elde edilir. Amortisman süresi tam sayı değildir, yani 23 anüite eşit, 24. anüite ise farklıdır. Anüite kalanı için daha sonra söz konusu olacaktır. ♦

2. Bir borç üç aylık dönemli ve üç aylık vadeli faizlenme ile itfa (amortisman) edilir. Beşinci ve üçüncü ödemenin farkı 840,64 denar, üçüncü ve altıncı ödemenin toplamı ise 42889,62 olduğuna göre faiz oranını hesaplayınız.

Dönem sonu faiz katsayısını hesaplayacağız. Verilen koşullara göre şu denklemler sistemini oluşturacağız:

$$\begin{cases} b_5 - b_3 = 840{,}64 \\ b_6 + b_3 = 42889{,}62 \end{cases}.$$

Denklemleri ilk ödeme ve faiz katsayısına göre düzenlemekle verilene denk olan şu sistem elde edilir:

$$\begin{cases} b_1r^4 - b_1r^2 = 840{,}64 \\ b_1r^5 + b_1r^2 = 42889{,}62 \end{cases},$$ Burada denklemleri taraf tarafa bölmekle

$$\frac{b_1r^2(r^2-1)}{b_1r^2(r^3+1)} = \frac{840{,}64}{42889{,}62} = 0{,}0196$$ bağıntısı elde edilir. Son denklemi sadeleştirerek $\dfrac{(r-1)(r+1)}{(r+1)(r^2-r+1)} = 0{,}0196$, oradan da $\dfrac{r+1}{r^2-r+1} = 0{,}0196$ denklemi elde edilir. Bu denklem r faiz katsayısına göre

$0{,}0196r^2 - 1{,}0196r + 1{,}0196 = 0$,
ikinci derece denklemdir ve çözümü $r_1 = 1{,}02$ ve $r_2 = 51$'dir. İkinci çözümün, faiz katsayısı için anlamı yoktur, birinci çözümden ise $1+\frac{p}{400}=1{,}02$ elde edilir ve oradan p = %8 *p.a.(d)* elde edilir. ♦

3. Hangi faiz oranıyla 40 000 denar tutarında bir borç 10 yılda 4500 denar tutarında eşit yıllık anüitelerle itfa edilecektir?

Hem borç hem de anüite bildiğine göre, borcun $Z = a\frac{r^n - 1}{r^n(r-1)}$, temel formülünden ya da $Z = a \cdot IV_p^{10}$ formülünden hareket edeceğiz. Dördüncü i / i tablosunda n = 10 için $IV_p^{10} = 8{,}79120879$ değerini arıyoruz. Bu sayı n = 10 için tabloda değeri olmadığına göre, sayılar arasında ara değerleme yapacağız. Veriler aşağıdaki tabloda yazılıdır.

$\mathrm{I}V_p^{10}$	p	$\mathrm{I}V_p^{10}$	p
8,86621634	%2,25	8,86621634	%2,25
7,75206393	%2,5	8,79120879	p
0,11415241	%-0,25	0,07500755	$2{,}25 - p$

Elde edilen farklardan orantı kuruyoruz:
0,11415241 : 0,25 = 0,07500755 : *(p* - 2,25), oradan da p – 2,25 = 0,16 ve sonunda p = %2,41 *p.a.(d)* elde edilir.

Aynı sonuca beşinci i / i tablosundan yararlanarak da gelebiliriz. Orada $V_p^{10} = 0{,}011375$ olduğuna göre $a = Z \cdot V_p^{10}$ formülünden yararlanıyoruz. ♦

Alıştırmalar

1. Hangi yıllık faiz oranıyla 60 000 denar tutarında bir borç, 5 yılda 3669,42 denar tutarında eşit üç aylık anüitelerle itfa edilecektir (ödenecektir)?

2. 200 000 denar borç, 9310,04 tutarında yarıyıllık anüitelerle ve %8 *p.a.(d)* yarıyıl vadeli faiz oranıyla ne kadar zamanda itfa edilecektir?

3. 1 000 000 denar borç, hangi faiz oranıyla, 61 776,61 denar tutarında yıllık anüitelerle 25 yılda itfa edilir?

4. Hangi yıllık faiz oranıyla 119 200 denar tutarında bir borç, 13 700 denar tutarında yıllık anüitelerle 11 yılda itfa edilecektir?

5. 400 000 denar tutarında borç, 24 462,68 denar tutarında eşit yarıyıllık anüitelerle ödenmektedir. Faiz oranı yarıyıllık vadeli, *%4 p.a.(d)* olduğuna göre, amortisman süresini hesaplayınız.

9.6. Eşit Anüiteli Borcun Amortisman Planı

Z tutarında bir borç eşit anüitelerle ödendiği durumda, borçlu her devre sonunda aynı tutarlı taksitler ödeyecektir. Bu ödemeler iki kısımdan meydana gelmektedir. Bu kısımlardan biri borcun bir kısmının ödeme tutarı ve kalan borcun faizidir.

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	Z	$i_1 = {Zp}/{100}$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = {R_{n-1}p}/{100}$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = {R_2 p}/{100}$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = {R_1 p}/{100}$	$b_n = a - i_n$	a

Bu şekilde borcun ödenmesinde, her gelen devrede borcun ödeme tutarı artar, fakat kalan borcun faizi azalmaktadır. Borcun ödenmesi önceden yapılan ve amortisman planı denilen bir plan üzerinde yapılmaktadır. Bu plan, genellikle tablo biçiminde gösterilir.

Sütunların dağılımı yukarıda gösterilen tablodan farklı olabilir, fakat her tabloda bu sütunlar olmalıdır.

Örneğin, bir amortisman planının nasıl yapıldığını adım adım göstereceğiz ve sonunda tabloyu dolduracağız.

1. 100 000 denar tutarında bir borç eşit yıllık anüiteli 5 yılda %4 *p.a.(d)* yıllık vadeli faiz oranıyla itfa edilecektir. Borcun ödenmesi için amortisman planı yapılsın.

Faizlenme yıllıktır, faiz katsayısı $r = 1{,}04$. Toplam 5 anüite vardır.

Anüitenin değeri $a = 100000\dfrac{1{,}04^5(1{,}04)-1}{1{,}04^5-1} = 22462{,}8$ denardır.

- Birinci kalan borcun tümüdür $R_5 = Z = 100\,000$ denardır;
- birinci faiz $i_1 = \dfrac{Zp}{100} = 100000\dfrac{4}{100} = 4000$ denardır – tüm borcun faizi;

– birinci ödeme $b_1 = a - i_1$ = 22462,8 - 4000 = 18462,8 denardır;
– ikinci kalan, ödenen bir anüite sonrası birinci yıl sonunda:
$R_4 = Z - b_1$ = 100 000 – 18462,8 = 81 537,2 denardır;
– ikinci faiz $i_2 = \frac{R_4 p}{100} = 81537{,}2\frac{4}{100} = 3261{,}5$ denardır- ikinci kalanın faizidir;

– ikinci ödeme $b_2 = a - i_2$ = 22462,8 - 3261,5 = 19201,3 denardır;
– üçüncü kalan $R_3 = R_4 - b_2$ = 81537,2 -19201,3 = 62335,9 denardır;
– üçüncü faiz $i_3 = \frac{R_3 p}{100} = 62335{,}9\frac{4}{100} = 2493{,}44$ denardır – ikinci kalanın faizidir;

– üçüncü ödeme $b_3 = a - i_3$ = 22462,8 - 2493,44 =19969,36 denardır;
– ödenen üç anüiteden sonra, üçüncü yıl sonunda dördüncü kalan:
$R_2 = R_3 - b_3$ = 62 335,9 – 19 969,36 = 42 366,5 denardır;
– dördüncü faiz $i_4 = \frac{R_2 p}{100} = 42366{,}5\frac{4}{100} = 1694{,}66$ denardır – üçüncü kalanın faizi;

– dördüncü ödeme $b_4 = a - i_4 =$ 46 ,8 -1694,66 = 0768,14 denardır;
– ödenen dört anüiteden sonra, dördüncü yıl sonunda beşinci kalan:
$R_1 = R_2 - b_4$ = 42 366,5 – 20768,14 = 21 598,4 denardır;
– beşinci faiz miktarı $i_5 = \frac{R_1 p}{100} = 21598{,}4\frac{4}{100} = 863{,}9$ denar – dördüncü kalanın faiz miktarı;
– beşinci ödeme $b_5 = a - i_5$ = 22462,8 - 863,9 = 2 598,4 denardır;
– beş anüite ödendikten sonra altıncı kalan: $R_0 = R_1 - b_5$ = 21598,4 - 21598,4 = 0 denardır. Demek ki borç ödenmiştir.

Bu şekilde hesaplanan değerleri tabloda gösterelim.

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	100000	4000	18462,8	22462,8
2	81537,2	3261,5	19201,3	22462,8
3	62335,9	2493,44	19969,36	22462,8
4	42366,5	1694,66	20768,14	22462,8
5	21598,4	863,9	21598,4	22462,8
toplam	307838	12313,5	100000	

Amortisman planı yapıldıktan sonra, bu planın doğru olup olmadığını yoklamak gerekir:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_6$;

Koşul 3. Faizler sütunundaki değerlerin toplamı ve ödemeler sütunundaki değerlerin toplamı devre sayısı ile anüitenin çarpımına eşit olmalıdır $\sum i_j + \sum b_j = na$;

Koşul 4. Anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$;

Koşul 5. Faizler sütununun toplamı $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$. dir.

Yukarıda çözülen örnekte, tüm bu koşulların sağlandığını kolay görebiliriz. Örneğin, ödemeler sütununda tüm ödemelerin toplamı 100 000 denardır; bu ise borç tutarıdır. Son ödeme ve son kalan birbirine eşittir.

Ondan sonra $\sum i_j + \sum b_j = 12313{,}5 + 100000 = 112313{,}5 = 5 \cdot 22462{,}8 = 112314$. Anüite, ödeme ve karşılık gelen faizin toplamı olduğunu görüyoruz, örneğin, 1694,66 + 20768,14 = 22462,8. Sonunda $12313{,}5 = 307838 \cdot \frac{4}{100} = 12313{,}52$, olduğuna göre beşinci koşul da geçerli olduğunu görüyoruz. ♦

2. Borç, üç aylık devreli anüitelerle ve üç aylık vadeli %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. İkinci devrede faiz miktarı 496,48 denar ve beşinci devredeki faiz miktarı 371,61 denar olduğuna göre, son üç devre için amortisman planını oluşturunuz.

Bu ödevde, amortisman planı sadece son üç anüite için yapılacaktır. Başlangıç için kaç anüitenin ödeneceğini de bilmiyoruz. Verilen koşulları yazalım:

$$r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02 \text{ ve } \begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Sistemi birinci ödeme ve anüiteye göre çözeceğiz.

$$\begin{cases} i_2 = 496{,}48 \\ i_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_2 = 496{,}48 \\ a - b_5 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b_1 r = 496{,}48 \\ a - b_1 r^4 = 371{,}61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1{,}02 b_1 = 496{,}48 \\ a - 1{,}02^4 b_1 = 371{,}61 \end{cases}.$$

Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak $(1{,}02^4 - 1{,}02)b_1 = 124{,}8$ elde edilir. Oradan da $b_1 = 2000$ denar ve $a = 2536{,}48$ denar elde edilir.

Şimdi, amortismanın devre sayısını belirtmek için, birinci ödemeye ait formülden yararlanacağız; $b_1 = \frac{a}{r^{4n}} = \frac{a}{1{,}02^{4n}}$.

O halde, $1{,}02^{4n} = \dfrac{2536{,}48}{2000} = 1{,}26824$, denklemi elde edilir. Bunun logaritmasını almakla $4n = \dfrac{\log 1{,}26824}{\log 1{,}02} = 12$. elde edilir. Buna göre, borç üç yıl boyunca 12 anüite ile itfa edilir.

Son üç ödemeyi formülle hesaplayabiliriz:
$b_{10} = b_1 r^9 = 2000 \cdot 1{,}02^9 = 2390{,}19$, $\quad b_{11} = b_1 r^{10} = 2000 \cdot 1{,}02^{10} = 2437{,}99$ ve $b_{12} = b_1 r^{11} = 2000 \cdot 1{,}02^{11} = 2486{,}74$.

Bunlara karşılık gelen kalanları da hesaplayalım:
$R_{12-9} = R_3 = a\dfrac{r^{12} - r^9}{r^{12}(r-1)} = 2536{,}48\dfrac{1{,}02^{12} - 1{,}02^9}{1{,}02^{12}(1{,}02-1)} = 7314{,}91$ denar, onuncu kalan $R_{12-10} = R_2 = R_3 - b_{10} = 4924{,}72$ denar elde edilir ve on birinci kalan için $R_{12-11} = R_1 = R_2 - b_{11} = 2486{,}74 = b_{12}$ olduğunu buluyoruz. Faizler ya kalanlardan ya da daha kolay $i_j = a - b_j$ özelliğinden belirtilir. Buna göre $i_{10} = a - b_{10} = 146{,}29$,
$i_{11} = a - b_{11} = 98{,}49$ ve $i_{12} = a - b_{12} = 49{,}73$ olduğunu buluyoruz. Şimdi amortisman tablosunu oluşturabiliriz:

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme
10	7314,91	146,29	2390,19
11	4924,72	98,49	2437,99
12	2486,74	49,73	2486,74

Planın tümü olmadığına göre yoklamasını yapamıyoruz.

Alıştırmalar

1. 100 000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

2. 80 000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %5 *p.a.(d)*'dir. Amortisman planını oluşturunuz.

3. 100 000 denar tutarında bir borç 6 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

4. 10 000 denar tutarında bir borç 4 yılda eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenmeyle itfa edilir. Yıllık faiz oranı %10 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını hesaplayınız ve amortisman planını oluşturunuz.

5. Bir borç eşit yarı yıllık anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle itfa edilir. Birinci ödeme 20 000 denar, son devrenin faizi 3221,02 denar ve sondan bir evvelki devrenin faizi 6149,22 denar olduğuna göre amortisman planını oluşturunuz.

9.7. Yuvarlak Tutarlı Anüiteli Borçlar

Belli bir borcu öderken, *a* anüitesi konkre tutarlı ya da borcun bir yüzdesi olarak verilebilir. Bu anüiteler genellikle tam sayıya yuvarlanıyorlar (onluk, yüzlük vb.). Bu yüzden bunlara **yuvarlak anüiteler** ve borçlara **yuvarlak anüiteli borçlar** denilir. Anüite, yukarıda sayılan şekillerden biriyle verilmediğinde ve borcun itfalı yuvarlak anüitelerle yapılma koşulları varsa, anüitenin hesaplama yüzdesini hesaplamak gerekir. Burada da dönem sonu borçlardan, amortisman devresinin sonunda ödemeler ve vade sonu faizlenmeden söz edeceğiz.

Ödevlerde genel olarak, borç tutarı, amortisman devresi ve faiz oranı veriliyor, belirtilmesi gereken ise, yuvarlak değerli anüite tutarı ve sonunda diğerlerinden farklı olan son anüite tutarını.

Borcun *Z* tutarı ve faiz oranı *%p p.a.(d)* verilmiş olsun. Amortisman devrelerinin sayısı bilindiği durumda, $n-1$ anüitenin değeri eşit ve son olan n-cı anüitenin değeri diğerlerinden küçük olduğuna göre ,$100V_p^n$ ve $100V_p^{n-1}$ arasında bulunan p_1 yüzdesi aranılır. Yuvarlanan anüiteler, eşit olan anüitelerden büyüktür ve bu yüzden son anüite onlardan farklı ve değeri diğerlerinden küçüktür ve ona **anüite kalanı** denir.

Demek ki, yuvarlak anüiteyi bilmiyorsak, borcun p_1 yüzdesi gibi ifade edilecektir, genel olarak tam sayı ile ya da $\boxed{a=\frac{p_1 Z}{100}}$, formülü ile ifade edilecektir ve bu durumda:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1}<p_1<100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}.$$

geçerli olacaktır.

1. 130 000 denar tutarında bir borç 6 yılda yuvarlak yarıyıllık anüitelerle ve %5 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlenme ile itfa edilir. Yuvarlak anüiteyi hesaplayınız.

Faiz katsayısı $r=1+\frac{5}{200}=1{,}025$, anüite sayısı 6 · 2 = 12'dir. p_1 yüzdesini

$$100\frac{1{,}0025^{12}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1}<p_1<100\frac{1{,}025^{11}(1{,}025-1)}{1{,}025^{12}-1},$$

eşitsizliğinden belirteceğiz. Oradan:

$\%9,74 < p_1 < \%10,51$ gerekir.

p_1 için bu aralıkta bulunan ve hesaplamalar için daha kolay tam sayı olan $p_1 = \%10$ değerini seçeceğiz.

Buna karşılık gelen yuvarlak anüite

$$a = \frac{p_1 Z}{100} = \frac{10}{100}130000 = 13000 \text{ denardır.}$$

Elde edilen anüite tam sayı değilse onu onluklara ya da yüzlüklere yuvarlayacağız.

Bazı durumlarda yuvarlak anüitenin değeri biliniyor olabilir ve amortisman devrelerinin sayısını hesaplamak gerekir. Bunu belirtmek için eşit anüiteli borçlarda yapıldığı gibi hareket edilir ve $n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a - Z(r-1)}$, formülünden yararlanılır. Burada yuvarlak anüitenin bilinen değerini kullanıyoruz. Anüite için elde edilen sayı n tam sayı olmadığı durumda, o sayıdan büyük olan ilk doğal sayı alınır.

2. 200 000 denar tutarında bir borç 40 000 denar tutarında yuvarlak yarıyıllık anüitelerle ve %10 *p.a.(d)* yarıyıllık faizlenme ile itfa edilir. Borç kaç devrede itfa edilecektir?

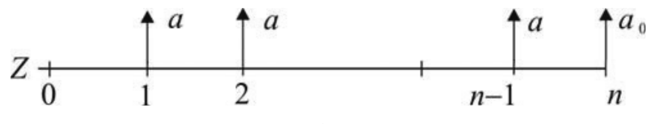
Yuvarlak anüite sabit değerle verilmiş ve borcun $\frac{40000}{200000} = \%20$'dir. Devre sonu faiz katsayısı $r = 1,05$'tir. Bu durumda amortisman devrelerinin sayısı için

$$n = \frac{1}{\log 1,05}\log\frac{40000}{40000 - 200000(1,05-1)} = 5,896$$

, geçerlidir. Buna göre faizin itfalı 6 devrede gerçekleşecek, öyle ki 5 anüitenin tutarı 40 000 denar, altıncısı ise farklı ve verilenden küçük olacaktır. ♦

Diğerlerinden farklı olan **son anüite** ya da **anüite kalanı** denilen bu taksitin değeri ne kadardır sorusu soruluyor.

Kira kalanlarında olduğu gibi, burada da aynı şekilde hareket edilir. Anüitelerin değerleri iskontolanır ve iskontolanmış anüitelerin toplamı Z borcuna eşittir.



Şek.. 2

Zaman ekseninde gösterilene göre (şek.2) borç için

$$Z = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \ldots + \frac{a_1}{r^n} = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-2}}\right) + \frac{a_1}{r^n}.$$

yazabiliriz. Parantezler içindeki ifade ilk terimi 1 ve ortak çarpanı $\frac{1}{r}$ olan, n - 1 terimli bir geometrik dizisinin ardışık terimlerinin toplamıdır. Oradan şunu elde ediyoruz:

$$Z = \frac{a}{r}\frac{1-\frac{1}{r^{n-1}}}{1-\frac{1}{r}} + \frac{a_1}{r^n} = \frac{a}{r}\frac{\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}}}{\frac{r-1}{r}} + \frac{a_1}{r^n} = a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)} + \frac{a_1}{r^n}.$$

Not 1. $\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}$ ifadesini IV_p^{n-1} finansal tablosundaki karşılığıyla değiştirirsek son anüite için

$$\boxed{a_1 = \left[Z - a \cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right]r^n = \left[Z - a \cdot \mathrm{I}V_p^{n-1}\right] \cdot \mathrm{I}_p^n}.$$

formülü geçerlidir.

Not 2. Yuvarlak anüitelerin ve ödemelerin özellikleri, aynı anüiteli borçlarda var olan özelliklerle aynıdır. Ödemeler, ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı r faiz katsayısı olan bir geometrik dizisi oluşturuyorlar. Anüite, ödeme ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır.

3. 10 000 denar tutarında bir borç 2500 denar tutarında yıllık anüitelerle ve %4 *p.a.(d)* yıllık faizlenme ile itfa edilir. Borç kaç yılda itfa edilecektir? Anüite kalanı ne kadar olduğunu hesaplayınız.

Dönem sonu faiz katsayısı $r = 1,04$, anüiteleri yuvarlak olarak alacağız. Amortisman devrelerinin sayısı için $n = \frac{1}{\log 1,04}\log\frac{2500}{2500 - 10000(1,04-1)} = 4,445$ elde edilir. Buna göre 5 anüiteden dördü eşit 2500 denar tutarında, beşincisi ise farklıdır:

$$a_1 = \left[Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n = \left[10000 - 2500\frac{1,04^4-1}{1,04^4(1,04-1)}\right]1,04^5 = 1125,72$$

denardır. ♦

Alıştırmalar

1. Bir borç üç aylık yuvarlak anüitelerle ve %40 *p.a.(d)* faiz oranıyla üç aylık vadeli faizlenmeyle 5 yılda itfa edilir. İkinci devredeki faiz miktarı 4000 denar ve beşinci ödeme 14641 olduğuna göre, borç tutarı ne kadardır?

(Tavsiye: Borcu, p_1 yuvarlak anüite ile hesaplayınız)

2. 128 000 denar tutarında borç yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli %7 *p.a.(d)* faizlenmeyle itfa edilir. Yuvarlak anüite 12 000 denar olduğuna göre, borç ne kadar zamanda ödenecektir?

3. Dört aylık yuvarlak anüitelerle, %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla ve aynı vadeli faizlenmeyle kaç devrede itfa edilecektir? Yuvarlak anüite tutarı 30 000 denar, ilk ödeme ise 12 000 denardır.

4. Bir borç yarıyıllık yuvarlak anüitelerle ve yarıyıllık faizlenmeyle iki yılda itfa edilir. Anüite kalanı 14 317,9 denar ve son ödeme 13 767,2 denar olduğuna göre, borç ne kadardır, yuvarlak anüite ne kadardır?

5. Bir borç yarıyıllık yuvarlak anüitelerle ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olmak üzere yarıyıllık faizlenmeyle 7 yılda itfa edilir. Anüite kalanı 249,36 olduğuna göre, borç tutarını ve yuvarlak anüiteyi belirtiniz.

9.8. Yuvarlak Anüiteli Borçların Amortisman Planı

Yuvarlak anüiteli borçların amortisman planının yapılması, eşit anüiteli borçlarda olduğu gibi yapılır, sadece son satırda, son anüitenin yazıldığı yerde farklılık vardır. Burada son ödeme de diğerlerden küçüktür. Önce lazım olan büyüklükler hesaplanır ve ondan sonra amortisman tablosu doldurulur.

1. 1 000 000 denar tutarında borç yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli %20 *p.a.(d)* faizlenmeyle 5 yılda itfa edilir. Anüiteler yuvarlak olacak şekilde borcun ödenmesi için amortisman planını oluşturunuz.

Borç 5 anüite ile itfa edilir. Faiz katsayısı $r = 1{,}2$. Yuvarlak anüiteyi hesaplamak için, anüitenin borcun hangi kısmı olduğunu belirteceğiz. p_1 yüzdesini sağlayan

$$100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1},$$ eşitsizlikte verilerin değiştirilmesiyle:

$$100\frac{1{,}2^5(1{,}2-1)}{1{,}2^5-1} < p_1 < 100\frac{1{,}2^4(1{,}2-1)}{1{,}2^4-1}\text{, ya da}$$

$33{,}44 < p_1 < 38{,}63$. elde edilir.

Bu aralıkta bulunan herhangi bir değer alınabildiğine göre, p_1 = %35 değerini seçeceğiz. Bu değere göre yuvarlak anüite $a = \frac{35}{100}\cdot 1000000 = 350000$ denardır. Beş anüiteden dördünün tutarı 350 000 denar, yani aynıdır, son anüite ise

$$a_1 = \left[1000000 - 350000\frac{1{,}2^4-1}{1{,}2^4(1{,}2-1)}\right]1{,}2^5 = 233760 \text{ denardır.}$$

Bireysel hesaplamaları ayrı ayrı yapalım:

- Birinci kalan borcun tümüdür $Z = R_5$ = 1000 000 denardır;
- birinci faiz $i_1 = \frac{20}{100}R_5 = 200000$ denardır – tüm borcun faizi;
- birinci ödeme $b_1 = a - i_1$ = 350000 - 200000 = 150000 denardır;
- ikinci kalan, $R_2 = R_5 - b_1$ = 850 000 denardır;
- ikinci faiz $i_2 = \frac{20}{100}R_4 = 170000$ denardır- ikinci kalanın faizidir;
- ikinci ödeme $b_2 = a - i_2$ = 350000 -170000 = 180000 denardır;
- Üçüncü kalan $R_3 = R_4 - b_2$ = 670000 denardır;
- Üçüncü faiz $i_3 = \frac{20}{100}R_3 = 134000$ denardır – ikinci kalanın faizidir;
- Üçüncü ödeme $b_3 = a - i_3$ = 350000 -134000 = 216000 denardır;
- Dördüncü kalan: $R_4 = R_3 - b_3$ = 454 000 denardır;
- dördüncü faiz $i_4 = \frac{20}{100}R_2 = 90800$ denardır ;
- dördüncü ödeme $b_4 = a - i_4 = 350000 - 90800 = 259200$ denardır;
- Beşinci kalan: $R_5 = R_4 - b_4$ = 194 800 denardır;
- beşinci faiz $i_5 = \frac{20}{100}R_1 = 38960$ denardır.

– beşinci ödeme $b_5 = a_1 - i_5 = 233760 - 38960 = 194800$ denardır; Bu ödeme diğerlerinden farklı olduğundan doğrudan doğruya $b_5 = Z - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 194800$ biçiminde de hesaplanabilir.

Borcun ödenmesine karşılık gelen amortisman tablosu doldurulur:

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	1000000	200000	150000	350000
2	850000	170000	180000	350000
3	670000	134000	216000	350000
4	454000	90800	259200	350000
5	194800	38960	194800	233760
toplam	3168800	633760	1000000	

Burada da, amortisman planının yoklaması yapılmalıdır:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\Sigma b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_1$;

Koşul 3. Yuvarlanan anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$; son ödeme hariç. Son anüite, anüite kalanı ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır. ♦

2. Borç, üç aylık devreli yuvarlanmış anüitelerle ve üç aylık vadeli %8 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Yuvarlanmış anüite tutarı 10 000 denar olduğuna göre, son dört devre için amortisman planını oluşturunuz.

Birinci kalanı bulmak için borç tutarını belirtmemiz gerekir. Yuvarlak anüitelerde $a = \frac{p_1}{100} Z$, olduğuna göre p_1 yüzdesine ihtiyaç vardır. Burada $100\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1} - 1}$ eşitsizliği geçerlidir.

Bu ödevde toplam nm = 12 devre vardır. Faiz katsayısı $r = 1 + \frac{8}{400} = 1{,}02$,'dir. Oradan, $100\frac{1{,}02^{12}(1{,}02-1)}{1{,}02^{12} - 1} < p_1 < 100\frac{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}{1{,}02^{11} - 1}$, ya da 9,46 $< p_1 <$ 10,22 elde edilir. p_1 = %10 alarak, borç tutarı $Z = \frac{100}{p_1} a = 100000$ denar olduğunu buluyoruz. Anüite kalanı $a_1 = \left[100000 - 10000\frac{1{,}02^{11} - 1}{1{,}02^{11}(1{,}02-1)}\right]1{,}02^{12} = 2703{,}28$ denardır.

Son dört ödemeyi belirtmek için, önce ilk ödemeyi belirtelim. $b_1 = a - i_1 = 10000 - \frac{8}{400} \cdot 100000 = 8000$. Ödemeler bir geometrik dizisinin ardışık terimleri olduğuna göre:

$b_9 = b_1 r^8 = 8000 \cdot 1{,}02^8 = 9373{,}27$, $b_{10} = b_1 r^9 = 8000 \cdot 1{,}02^9 = 9560{,}74$,

$b_{11} = b_1 r^{10} = 8000 \cdot 1{,}02^{10} = 9751{,}96$ elde edilir. Son ödeme dizinin terimi değildir, bu yüzden onu başka şekilde hesaplanmalıyız. Bunu belirtmek için, yöntemlerden biri $a_1 = b_{12}\, r$ formülünden yararlanarak belirtilir. Buna göre $b_{12} = \frac{a_1}{r} = 2650{,}27$ denardır. Son ödemeye kademe kademe de gelebiliriz. Ödenen sekiz anüiteden sonra, kalanı doğrudan doğruya, ilk sekiz ödemenin toplamını borçtan çıkararak belirtelim:

$$R_4 = Z - \left(b_1 + b_1 r + b_1 r^2 + \ldots + b_1 r^7\right) = Z - b_1 \frac{r^8 - 1}{r - 1}$$

$$= 100000 - 8000 \frac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 31336{,}24 \text{ denar.}$$

Son dört devrenin amortisman planını oluşturalım.

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
9	31336,24	627,72	9373,27	10000
10	21962,7	493,54	9560,24	10000
11	12401,7	248,04	9751,96	10000
12	2650,27	53	2650,27	2703,28

Alıştırmalar

1. 60 000 denar tutarında borç yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık vadeli olmak üzere %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Yuvarlak anüite 4000 denar tutarında olduğuna göre, borç ne kadar zamanda ödenecektir? Son anüiteyi ve son ödemeyi hesaplayınız ve ondan sonra amortisman planını oluşturunuz.

2. 20 000 denar borç, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme ile dört yılda 3000 denara yuvarlanmış yarıyıllık anüitelerle itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

3. 8 000 denar borç, faiz oranı yıllık %5 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme, yıllık anüitelerle itfa edilir. Yıllık anüiteler borcun %35'i olduğuna göre, amortisman planını oluşturunuz ve son anüiteyi hesaplayınız.

4. 200 000 denar borç, faiz oranı %4 *p.a.(d)* olmak üzere, yıllık vadeli faizlenme ile dört yılda yuvarlanmış yıllık anüitelerle itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

5. Bir borç, yuvarlanmış yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle 3 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* yarıyıllıktır. Son ödeme 1265,51 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

9.9. Alıştırmalar

1. 240 000 denar tutarında borç 4 yılda, eşit yarıyıllık devreli anüitelerle ve yarıyıllık vadeli faizlenmeyle itfa edilecektir. Faiz oranı %9 *p.a.(d)* olduğuna göre, anüite tutarı ne kadardır? Hesaplanan toplam faiz miktarı ne kadardır?

2. Her biri eşit anüiteli olan iki borç alınmıştır. 160 000 denar tutarında olan birinci borç 4 yılda, ikincisi ise 6 yılda itfa edilecektir. Her iki borç, yarıyıllık anüitelerle ve aynı %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla ödendiğine göre, ikinci borcun tutarı ne kadardır?

3. Bir borç diğer bir borçtan 100 000 denar büyüktür. Birincisi 20 000 denar tutarlı eşit yıllık anüitelerle 12 yılda, ikincisi ise eşit yıllık ünitelerle 10 yılda itfa edilir. Her iki borca %5 *p.a.(d)* faiz oranı uygulandığına göre, ikinci borcun anüite tutarı ne kadardır? Not: $Z_1 = Z_2 + 100\,000$'dir.

4. Bir borç 9 yılda dört aylık vadeli faizlenme ile ve dört aylık devreli eşit tutarlı anüitelerle itfa edilir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*, beşinci ve ikinci ödemenin farkı 12000 denardır. Anüite tutarını hesaplayınız.

5. Bir borç 2 yılda aylık vadeli faizlenme ile ve aylık devreli eşit tutarlı anüitelerle itfa edilir. Faiz oranı %24 *p.a.(d)* ve son faiz miktarı 300 denardır. Anüite ve borç tutarını hesaplayınız.

6. Altı yılda yarıyıllık vadeli faizlenme ile ve yarıyıllık devreli eşit tutarlı anüitelerle, %10 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilen borcun, dördüncü ödeme tutarı 34038,22 denardır. Borç tutarını, ödeme vadesinin tam yarısında borcun kalanını ve hesaplanan toplam faiz tutarını hesaplayınız.

7. 200000 denar tutarında borç, her iki yılda bir ödenen anüitelerle ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olmak üzere iki yıl vadeli faizlenmeyle 26 yılda itfa ediliyor. Altıncı anüiteden on birinci anüiteye kadar borcun hangi kısmı ödenmiştir?

8. Bir borç, üç aylık dönemli eşit tutarlı anüitelerle ve faiz oranı %16 *p.a.(d)* olmak üzere üç aylık vadeli faizlenmeyle 10 yılda itfa ediliyor. Ödenen 25 anüiteden sonra borç 4000 denar azalmıştır. Borcun tutarı ne kadardır?

9. Bir borç, yarı yıllık dönemli eşit tutarlı anüitelerle ve faiz oranı %10 *p.a.(d)* olmak üzere yarıyıllık vadeli faizlenmeyle 10 yılda itfa ediliyor. On birinci anüiteden başlayarak on beşinci anüiteye kadar 10 000 denar tutarında borç ödenmiştir. Borç tutarı ne kadardır? on beşinci anüiteden sonra borcun kalan kısmı ne kadardır?

10. Yarıyıllık anüitelerle ve %6 *p.a.(d)* faiz oranı olmak üzere yarıyıllık vadeli faizlenmeyle ödenen bir borcun hesaplanan yedinci faizi 130 727 denardır. Borç tutarını ve ödenen yedi anüiteden sonra borcun kalan kısmını belirtiniz.

11. Bir borç, üç aylık dönemli anüitelerle ve faiz oranı %32 *p.a.(d)* olmak üzere üç aylık vadeli faizlenmeyle 12,5 yılda itfa ediliyor. Ödenen 40 anüiteden sonra borcun kalanı 20 000 denar olur. Borç tutarı ne kadardır? Anüite tutarı ne kadardır?

12. Faiz oranı %6 *p.a.(d)* olmak üzere 40 000 denar tutarlı anüitelerle, 1 000 000 tutarında borç ne kadar zamanda itfa edilir? Anüiteler ve faizlenme yarıyıllık vadelidir.

13. Bir borç, eşit tutarlı yıllık anüitelerle ve yıllık dönemli faizlenme ile itfa edilir. Birinci ödeme 200 000 denar, son yıldaki faiz miktarı 11576,25 denar ve sondan bir önceki periyotta faiz miktarı 22 601,25 denar olduğuna göre, borç tutarını belirtiniz.

14. 630 182 tutarında bir borç üç aylık devreli anüitelerle ve aynı devreli faizlenmeyle itfa edilir. Birinci ödeme 100 000 denar ve faiz oranı %8 *p.a.(d)* olduğuna göre, borç kaç devrede ödenecektir?

15. 509 776 denar tutarında borç, 3 yılda eşit aylık anüitelerle ve faizlenme ile itfa edilir. Anüite tutarı 20 000 denar olduğuna göre, faiz oranı ne kadardır?

16. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme ile itfa edilir. Üçüncü ve ikinci ödemenin toplamı 20 604 denar ve dördüncü ve ikinci ödemenin farkı 412 denar olduğuna göre, faiz oranı ne kadardır?

17. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Ödenen üç anüiteden sonra kalan borç tutarı 14 720,17 denar ve ödenen altı anüiteden sonra kalan borç tutarı 11 164,76 denar olduğuna göre, borç tutarını hesaplayınız.

18. 300 000 denar tutarında borç, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faizlenme ile 10 yılda itfa edilir. Yıllık faiz oranı %6 *p.a.(d)*'dir. Anüite tutarını ve altıncı yıl sonunda borcun kalan kısmını hesaplayınız.

19. Bir borç, eşit yarıyıllık anüitelerle ve yarıyıllık faizlenme olmak üzere %6 *p.a.(d)* faiz oranıyla 3 yılda itfa edilir. Birinci ödeme 77298,75b denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

20. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %12 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. İkinci ay faiz tutarı 87 497,33 denar ve birinci ödeme 10000 denar olduğuna göre, ilk dört ödemenin amortisman planını oluşturunuz.

21. Bir borç, eşit üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile itfa edilir. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Üçüncü dönemde faiz tutarı 4556,84 denar olduğuna göre son üç döneme ait amortisman planını oluşturunuz.

22. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %4 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Ödenen ilk anüiteden sonra borcun kalan kısmı 176 652,92 denar ve ödenen iki anüiteden sonra borcun kalan kısmı 135 052,91 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

23. 80 000 borç, yuvarlak üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile itfa edilir. Faiz oranı %8 *p.a.(d)*'dir. Yuvarlak anüite 18 000 denar ve ilk ödeme 1000 denar olduğuna göre, borç kaç devrede itfa edilecektir?

24. Bir borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve yıllık faizlenme olmak üzere %3 *p.a.(d)* faiz oranıyla itfa edilir. Üçüncü ödeme 10 609 denar ve son anüitenin bir öncesinde borcun ödenmiş kısmı 185 989 denar olduğuna göre, anüite kalanını belirtiniz.

25. Bir borç, yuvarlak üç aylık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile dört yılda itfa edilir. Faiz oranı %12 *p.a.(d)*'dir. Sondan bir önceki devrede faiz tutarı 921,17 denar olduğuna göre, anüite kalanını belirtiniz.

26. 120 000 denar tutarında borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile beş yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

27. 100 000 denar tutarında borç, yuvarlak yarı yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 18 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Borcun son üç yılının amortisman planını oluşturunuz.

28. 20 000 denar tutarında borç, yuvarlak üç aylık 3000 denar tutarında anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile iki yılda itfa edilir. Borcun amortisman planını oluşturunuz.

29*. Bir borç, yuvarlak yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile dört yılda itfa edilir. Üç yıl sonra borcun ödenen kısmı 81161,6 denar ve birinci ödeme 26000 denar olduğuna göre, borcun amortisman planını oluşturunuz.

30*. Bir borç, yuvarlak yarı yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 8 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)* ve son ödeme 4984,27 denar olduğuna göre borcun son üç yılının amortisman planını oluşturunuz.

31. 500000 denar tutarında borç, altı aylık eşit anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 30 yılda itfa edilmelidir. Faiz oranı %2,8 *p.a.(d)* olduğuna göre anüite tutarı ne kadardır?

32*. Altı aylık eşit anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 30 yılda itfa edilmelidir. Faiz oranı %2,8 *p.a.(d)* ve birinci ödeme 5 372,22 denar olduğuna göre borç tutarı ne kadardır?

33*. Bir borç, eşit yıllık anüitelerle ve aynı vadeli faizlenme ile 50 yılda itfa edilir. Faiz oranı %4 *p.a.(d)*'dir. Ödenen 20 anüiteden sonra borcun ödenmiş kısmının tutarı 58515,66 denar olduğuna göre, anüite tutarını ve borç tutarını hesaplayınız.

34*. 2 400 000 denar tutarında borç, altı aylık devreli yuvarlak 120 000 denar anüitelerle ve aynı dönemli faiz oranıyla itfa edilir. Faiz oranı %2 *p.a.(d)* olduğuna göre borç ne kadar zamanda itfa edilecektir? Son anüite ne kadardır?

Konu Özetleri

Borç, para, mal veya para cinsinden bir değerin belirli bir vade ve koşulla geri alınmak üzere verilmesidir, yani borç veren, finansal varlıklarını borç alana geçici bir süre için hizmetine devretmesidir. Bu bölümde, borçlunun borcunu ödeme koşulları, borç verene olan yükümlülüğü, yani finansal varlıkların devredilme koşulları, borcun süresinde faizlendirmeyi içeren, anlaşmalar söz konusu olacaktır. Borç tutarı genellikle birden verilir ve geri alınması birden değil, çok kez belli periyotlarda gerçekleştirilir. Her periyotta borcun ödendiği tutara **ödeme** denir. Belli periyotta ödemenin faiziyle beraber tutarına **anüite** denir; diğer sözlerle anüite, belirli bir zaman süreci içerisinde, eşit aralıklarla verilen veya alınan eşit ödemeler serisidir. Borcun her bireysel ödemesine gereken zaman süresine **amortisman vadesi** denir.

- Anüitelerin ödeme süresine göre, **dönem sonu anüiteli** borçlar (ödemeler serisi devrenin sonunda yapılan) ve **dönem başı anüiteli** borçlar (ödemeler devrenin başında yapılan anüiteler)
- Faizin hesaplanmasına göre borçlar, **dönem sonu faizlenen** ve **dönem başı faizlenen** biçiminde adlandırılabilir.

Şunu da belirtelim, **borcun amortismanı** denilen kademeli ödemede, önceden belirlenmiş tutarlarla, belli zaman aralıklarında, önceden belirlenmiş bir plan üzerinde, ödenmesine **amortisman planı** denir.

Tutarı Z olan bir borç alınmış ve geri ödemesi, her biri *a* tutarında *n* eşit anüite ile yapılacaktır. Faiz oranı *p* dönem sonu faizlendirme ve faiz dönemi anüitelerin ödeme dönemiyle aynı olsun. Böyle durumda borç şu formülle hesaplanır:

$\boxed{Z = a\dfrac{r^n - 1}{r^n(r-1)}}$ r dönem sonu faiz katsayısıdır.

Borç bilindiğinde, anüiteyi hesaplamak için şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{a = Z\frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}}$$

k-cı ödemeyi b_k ve k-cı faizi i_k ile işaret edersek birinci anüite $a = b_1 + i_1$ olur. Burada faiz, birinci dönem için Z tüm borç tutarına hesaplanır, yani $i_1 = \dfrac{Zp}{100}$'dir.

Kalan anüitelerin her birini bu şekilde inceleyerek son anüiteye $a = b_n + i_n$ varıyoruz. Burada faiz borcun kalan kısmına $Z - b_1 - b_2 - \dots - b_n$ uygulanır, yani $\boxed{i_n = \dfrac{(Z - b_1 - b_2 - \dots - b_{n-1})p}{100}}$ dir.

Ödemeler, ilk terimi b_1 ve ortak çarpanı r faiz katsayısı olan bir geometrik dizisini oluşturuyorlar. Daha da, her ödeme $\boxed{b_k = b_1 r^{k-1}}$ formülüyle hesaplanabilir.

Genel olarak, k- cı ödeme borç ile ifade edildiği durumda şu formülü kullanacağız:

$$\boxed{b_k = Z\frac{r-1}{r^n-1}r^{k-1}},$$

anüite ile ifade edildiğinde $\boxed{b_k = \frac{a}{r^{n-k+1}}}$ formülünü kullanabiliriz.

O_k ile işaret edeceğimiz, k devrede (periyotta) borcun ödenmiş kısmı k-cı anüite dahil, ilk k ödemenin toplamına eşittir, yani:$O_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$ yani

$$\boxed{O_k = b_1\frac{r^k-1}{r-1}} \text{ dir.}$$

Ödenen k – anüiteden sonra borcun kalan kısmını R_{n-k} ile işaret edersek, birinci ödemeye göre veya anüite ile ifade edilişi:

$$\boxed{R_{n-k} = b_1\frac{r^n-r^k}{r-1}}, \text{ ya da } \boxed{R_{n-k} = a\frac{r^n-r^k}{r^n(r-1)}} \text{ dir.}$$

Amortisman süresinin, borç ve anüite ile ifade edilişi:

$$\boxed{n = \frac{1}{\log r}\log\frac{a}{a-Z(r-1)}} \text{ dir.}$$

Z tutarında bir borç eşit anüitelerle ödendiği durumda, borçlu her devre sonunda aynı tutarlı taksitler ödeyecektir. Bu ödemeler iki kısımdan meydana gelmektedir. Bu kısımlardan biri borcun bir kısmının ödeme tutarı ve kalan borcun faizidir. Bunu aşağıdaki tablo biçiminde göstereceğiz:

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	Z	$i_1 = Zp/100$	$b_1 = a - i_1$	a
2	$R_{n-1} = Z - b_1$	$i_2 = R_{n-1}p/100$	$b_2 = a - i_2$	a
...	...	...	...	...
$n-1$	$R_2 = R_3 - b_{n-2}$	$i_{n-1} = R_2 p/100$	$b_{n-1} = a - i_{n-1}$	a
n	$R_1 = R_2 - b_{n-1}$	$i_n = R_1 p/100$	$b_n = a - i_n$	a

Amortisman planı yapıldıktan sonra, bu planın doğru olup olmadığını yoklamak gerekir:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;
Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_6$;
Koşul 3. Faizler sütunundaki değerlerin toplamı ve ödemeler sütunundaki değerlerin toplamı devre sayısı ile anüitenin çarpımına eşit olmalıdır $\sum i_j + \sum b_j = na$;
Koşul 4. Anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$;
Koşul 5. Faizler sütununun toplamı $\sum i_j = \frac{p}{100} \sum R_j$ dir.

Belli bir borcu öderken, *a* anüitesi konkre tutarlı ya da borcun bir yüzdesi olarak verilebilir. Bu anüiteler genellikle tam sayıya yuvarlanıyorlar (onluk, yüzlük vb.). Bu yüzden bunlara **yuvarlak anüiteler** ve borçlara **yuvarlak anüiteli borçlar** denilir. Anüite, yukarıda sayılan şekillerden biriyle verilmediğinde ve borcun itfalı yuvarlak anüitelerle yapılma koşulları varsa, anüitenin hesaplama yüzdesini hesaplamak gerekir. Burada da dönem sonu borçlardan, amortisman devresinin sonunda ödemeler ve vade sonu faizlenmeden söz edeceğiz.

Borcun *Z* tutarı ve faiz oranı *%p p.a.(d)* verilmiş olsun. Amortisman devrelerinin sayısı bilindiği durumda, $n - 1$ anüitenin değeri eşit ve son olan *n*-ci anüitenin değeri diğerlerinden küçük olduğuna göre, $100\ V_p^n$ ve $100V_p^{n-1}$ arasında bulunan p_1 yüzdesi aranılır. Yuvarlanan anüiteler, eşit olan anüitelerden büyüktür ve bu yüzden son anüite onlardan farklı ve değeri diğerlerinden küçüktür ve ona **anüite kalanı** denir.

Demek ki, yuvarlak anüiteyi bilmiyorsak, borcun p_1 yüzdesi gibi ifade edilecektir, genel olarak tam sayı ile ya da $\boxed{a = \frac{p_1 Z}{100}}$, formülü ile ifade edilecektir ve bu durumda:

$$\boxed{100\frac{r^n(r-1)}{r^n-1} < p_1 < 100\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^{n-1}-1}}$$

geçerli olacaktır. Diğerlerinden farklı olan **son anüite** ya da **anüite kalanı** denilen bu taksitin değeri şu formülle hesaplanır:

$$\boxed{a_1 = \left[Z - a\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}(r-1)}\right]r^n}$$

Yuvarlak anüiteli borçların amortisman planının yapılması, eşit anüiteli borçlarda olduğu gibi yapılır, sadece son satırda, son anüitenin yazıldığı yerde farklılık vardır. Burada son ödeme diğerlerden küçüktür. Önce lazım olan büyüklükler hesaplanır ve ondan sonra amortisman tablosu doldurulur.

Burada da, amortisman planının yoklaması yapılmalıdır:

Koşul 1. Tüm ödemelerin toplamı borç tutarına eşit olmalıdır $\sum b_j = Z$;

Koşul 2. Son ödeme tutarı, son kalana eşit olmalıdır, $b_n = R_1$;

Koşul 3. Yuvarlanan anüite, her faiz ve ona karşılık gelen ödemenin toplamıdır, $a = b_j + i_j$; son ödeme hariç. Son anüite, anüite kalanı ve ona karşılık gelen faizin toplamıdır. ♦

Çözümler ve Ödevlerin Cevapları

1.1.

1. a) 18750 denar; b) 937,5 denar; c) 260,4 denar, zaman ayarı (30,360) ve 256,85 denar (*k* ,365). **2.** 20 yıl. **3.** %5. **4.** a) 14750 denar b) 87500 denar. **5.** $K = K_1 + K_2 = 108000$ denar. **6.** 2691 denar.

1.2.

2. $I = 12000$, $K = 72000$ denar. **3.** $I = 1760$, $K = 35200$ denar. **4.** 70400 denar.
5. $K = 33750$ denar, $I = 150$ denar. **6.** Borç 260400 denar, faiz 65100 denar.
7. Borç 10568 denar, faiz 568 denar.

1.3.

4. 75 gün . **5.** 5 ay ve 20 gün. **6.** a) 50 gün, 4. 05; b) 13 gün, 4. 05. **7.** 29 gün, 2.05. **8.** 23.04. **9.** 7.05.

1.4.

2. 123 gün. **3.** 69 gün ya da 13.06. **4.** 25.02. **5.** 8.05, 28 gün başlangıç tarihi 10.04.

1.5.

4. *Dk* = 21,875 denar *Dr* = 21,685 denar fark = 0,1897. **5.** $ 1 195 168,66

1.6.

4. 3 166. **5.** yatırımlar 31.12. tutarı 17 976,1 denar; kaldırılan = 15 200 denar, faiz = 922 denar saldo = 2 776 denar.

1.7.

5. Sıralı faiz = 320,9 denar, ceza faizi = 27,30; saldo = 49.651,8 denar.

1.8.

1. 826 gün (ya da 2 gün, 3 ay ve 6 gün). **2.** $K = 176147$ denar. **3.** $p = \%4,64$.
4. $K = 306748$ denar. **5.** $K = 300000$ denar. **6.** 18000 denar. **7.** $K = 105680$ denar, $I = 5680$ denar. **8.** 10.04 , %61,3 ile . **9.** 246 gün. **10.** 13. 06.
11. iskonto = 2222,22 efektif tutar =$ 247 797,36.
12. efektif tutar = $ 2 984 200. **13.** efektif tutar = 147 546 denar, Dk = 2 287,5 denar. **14.** $ 147 192. **15.** 63 gün. **16.** 2 471 denar. **17.** yatırım = 79 770 denar; kaldırılmış = 65 000 denar; saldo = 14 770 denar faiz = 1 770 denar.
18. sıralı faiz = 4.248 denar, ceza faizi = 62,46 denar ; saldo = 25.689,54.

2.1.

2. a) 80 kısım; b) 130 kısım. **4.** a) 80 greyn; b) 5040 greyn. **5.** a) 23 karat 1 greyn; b) 16 karat 1 greyn; c) 232 peniveyt 11 greyn; d) 209 peniveyt 16 greyn.

2.2.

1. *W* 80,,9,6. **2.** 979,17 %. **3.** 640 %. **4.** a) 600 °%o; b) *W* 7,,2,4. **5.** a) 420 %o; b) *W* 121,,4,8.

2.3.

1. 158,4*g* . **2.** 498,75g . **3.** 700g. **4.** 384g .

2.5.

5. %5,5 euro artışı ve %5,1 dolar düşüşü; **6.** Devalüasyon, %46,3 **7.** 1,383

2.8.

4. 144.000 USD **5.** 68.493.

2.9.

5. 0,694 - 0,6849

2.10.

1. 225 EUR **2.** Zarar 3.000 MKD

2.11.

1. Saat 14 te +20 EUR, sat 19 de -8 EUR **2.** Ortalama kur 1,041 kar 767,5 CHF.
3. 100 MKD. **4.** 17 000 USD. **5.** saat 15 te.

2.12.

1. *W* 2,,1,28 . **2.** ‰600. **3.** ‰881,25. **4.** a) ‰800; b) *W* 30. **5.** 117,5g . **6.** 296g. **7.** ‰870. **8.** 180 peniveyt. **9.** +1,65% -1,57% **10.** Amortisman, %21,9 **11.** 1,3965. **12.** Saat 14'te: kazanç 48 EUR, saat 19'da: zarar 24 EUR . **13.** Ortalama kur 1,64, kazanç (AUD 1454 bazında, EUR 889 bazında).

3.1.

2. a) 2^{x+y}, b) 2^{-x}, c) 132^x, d) 10^{xy}. **3.** a) $3^x = 9^{x/2}$, b) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x > \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x<0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x=0$; $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-x}$, $x>0$. **4.** a) $x<y$, b) $x>y$, c) $x<y$. **5.** a) $4^x - 9^x$, b) $25^x + 25^{-x} - 2$, c) $64^x + 3\cdot 16^x + 3\cdot 4^x + 1$.

3.2.

1. a) $x=-3$, b) $x=0$, c) $x=8$, d) $x=-3$, e) $x_1=4$, $x_2=-1$, f) $x=2$. **2.** a) $x=8$, b) $x=2$, c) $x=-15$ d) $x=-6$. **3.** a) $x_1=1$, $x_2=0$, b) $x=0$, c) $x=-2$. **4.** a) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=0$, b) $x_1=2$, $x_2=-1$, c) $x_1=-1$, $x_2=6$. **5.** a) $x=4$, b) $x_1=-1$, $x_2=-\frac{3}{2}$, c) $x_1=3$, $x_2=2$.

3.3

1.

Kavramlar	$\log_6 216 = 3$	$\log_x \frac{4}{9} = 2$	$\log_{\sqrt{7}} 49 = 4$	$\log_a (b+2) = 5$	$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
Logaritma değeri	3	2	4	5	$\frac{1}{2}$
Logaritma tabanı	6	x	$\sqrt{7}$	a	25
Logaritması alınan sayı	216	$\frac{4}{9}$	49	$b+2$	5

2. a) -2, b) 2, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$. **3.** a) $x=\sqrt{3}$, b) $x=6$, c) $x=-2$, d) $-2{,}1$. **4.** a) 2, b) 9. **5.** a) 1, b) 30, **6.** $x \in (-\infty, 0) \cup (1+\infty)$.

3.4.

1. a) $\log x = \log 3 + \log a + \log b$, b) $\log x = 2\log a + \log b + 5\log c$,

c) $\log x = -\log 2 + \log a + \log b - \log c$, d) $\log x = \log 2 + \log(a-b)$, e) $\log x = \frac{1}{2}\log a - \log(b^2 - c^2)$,

f) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b$. **2.** a) $-\frac{1}{2}$, b) -18, c) 1. **3.** a) $x=10$, b) $x=\frac{8}{9}$, c) $x=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{2}}$,

d) $x=\sqrt[4]{\frac{4^6}{3^4}}$, e) $\frac{5}{3}$, f) $\frac{8}{27}$, g) $\sqrt[3]{6}$, h) 24. **4.** a) 0,60; 0,78; 0,90; 0,96; b) 1,08; 1,20; 1,26.

5. a) -3, b) 3, c) -1, d) -1.

3.5.

2. Tavsiye: a) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} + 1$,

b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 4} \cdot \log_5 4 \cdot \frac{1}{\log_5 6} \cdot \frac{\log_5 6}{\log_5 7} \cdot \frac{\log_5 7}{\log_5 8}$.

3. 8. **4.** a) $-\frac{1}{2}$, b) 18, c) $\sqrt{5}$. 5. $\log_b a = \log_{\left(\frac{1}{b}\right)^{-1}} a = -\log_{\frac{1}{b}} a$.

3.6.

1. $x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$. **2.** $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. **3.** $x=2$. **4.** $x_1 = 7$, $x_2 = \frac{16}{3}$. **5.** $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. **6.** $x=16$. **7.** 4.

3.7.

1. a) $x=y$, b) $x>y$, c) $x<y$. **4.** a) $a^{\frac{4}{3}}$, b) $a^{\frac{2}{3}}$. **5.** $x=8$. **6.** $x=2$. **7.** ŕ. **8.** $x=1$. **9.** $x=1$.
10. 4. **11.** a) $x=4$, b) $x=\frac{1}{81}$, c) $x=\frac{1}{10}$, d) $x=\frac{1}{2}$, e) $\sqrt[5]{100}$, ŕ) $x=2$.

12. a) $\log 2+\log x+\log y$, b) $\log 3+2\log x+3\log y$, c) $2\log x+5\log y+\frac{1}{2}\log z$

d) $\sqrt{b}\log a+3\log c$, e) $\log 6+\log x+\frac{2}{3}\log y$, f) $\frac{1}{2}(\log 2+\log x)+\frac{1}{4}(3\log x+\frac{1}{2}\log y)$,

g) $\frac{1}{2}(\log x+\frac{3}{4}\log y)$. **13.** a) $x=6$, b) $x=10$, c) $x=21$, d) $x=1125$. **14.** a) $x\approx 6{,}73$; b) $x\approx 0{,}00884$; c) $x\approx 76{,}296$. **15.** a) $2\log_4 5$, b) $\frac{2}{\log_{\sqrt{7}}3}$, c) $-\log_{\frac{1}{10}}5$. **16.** a) $\frac{1}{35}$, b) $\log_2\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **17.** a) 8 b) 1. **18.** $x=1$. **19.** $x=5$. **20.** $x=25$. **21.** $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$. **22.** $x=7$. **23.** $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=10$.

4.1.

1.

Dereceler	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Radyanlar	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2. $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$, $tg\beta=\frac{12}{5}$, $ctg\beta=\frac{5}{12}$. **3.** $\sin\beta\approx 0{,}87$, $\cos\beta\approx 0{,}49$, , $tg\beta\approx 1{,}77$, $ctg\beta\approx 0{,}56$. **4.** $\sin\alpha=0{,}8$, , $\cos\alpha=0{,}6$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$. **5.** $\sin\alpha\approx 0{,}78$, $\cos\alpha\approx 0{,}62$, $tg\alpha\approx 1{,}26$, $ctg\alpha\approx 0{,}79$.

4.2.

1. a) 0,54, b) 0,98, c) 0,84, d) 0,54. **2.** a) 60^0, b) 70^0, c) 15^0, d) 40^0. **3.** a) 1, b) 1, c) 1. **4.** a) 3, b) $-\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$, c) 1. **5.** a) 45^0, b) 30^0, c) 45^0, d) 60^0, e) 30^0.

4.3.

1. a) $\sin 48^0\approx 0{,}74$, $\cos 48^0\approx 0{,}67$, $tg48^0\approx 1{,}11$, $ctg48^0\approx 0{,}9$, b) $\sin 23^0 12' 23''\approx 0{,}39$, $\cos 23^0 12' 23''\approx 0{,}92$, $tg23^0 12' 23''\approx 0{,}43$, $ctg23^0 12' 23''\approx 2{,}33$, c) $\sin 16{,}19^0\approx 0{,}28$, $\cos 16{,}19^0\approx 0{,}96$, $tg16{,}19^0\approx 0{,}29$, $ctg16{,}19^0\approx 3{,}44$, **2.** a) $\sin\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}78$, $\cos\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}62$, $tg\frac{2\pi}{7}\approx 1{,}25$, $ctg\frac{2\pi}{7}\approx 0{,}8$, b) $\sin\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $\cos\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}73$, $tg\frac{5\pi}{21}\approx 0{,}93$, $ctg\frac{5\pi}{21}\approx 1{,}08$. **3.** a) $35^0 42' 20''$, b) $44^0 25' 23''$, c) $67^0 32' 3''$, d) $26^0 23' 16''$, e) $44^0 24' 55''$, f) $72^0 53' 50''$. **4.** a) 0,01, б) $-0{,}2$. **5.** a) $25^0 55' 39''$, b) $17^0 26' 14''$, c) $46^0 12' 59''$.

4.4.

1. a) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $tg\alpha=\frac{5}{12}$, $ctg\alpha=\frac{12}{5}$, b) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $tg\alpha=\sqrt{15}$, $ctg\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$,
c) $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $ctg\alpha=\frac{5}{4}$, d) $\sin\alpha\approx 0{,}92$, $\cos\alpha\approx 0{,}39$, $tg\alpha\approx 2{,}44$,
2. a) $\sin^2\alpha$, b) $-\cos^2\alpha$, c) 1. **6.** $\frac{55}{54}$. **7.** $6\sqrt{2}$.

4.5.
1. a) $\beta=53{,}8^0$, $a=40{,}1cm$, $b=54{,}9cm$, b) $\beta=74{,}2^0$, $a=11{,}7cm$, $b=3{,}3cm$, c) $\beta=24{,}6^0$, $b=5{,}14cm$, $c=5{,}65cm$. **2.** a) $\beta=8^0$, $a=1750{,}4cm$, $c=1767{,}6cm$, b) $\alpha=41^0\,30'$, $a=66{,}1cm$, $c=99{,}7cm$, c) $\beta=66^0$, $b=11{,}79cm$, $c=5{,}25cm$. **3.** a) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=42^0\,2'\,55''$, $b=224{,}48cm$, b) $\alpha=61^0\,55'\,39''$, $\beta=28^0\,4'\,21''$, $c=59{,}5cm$, c) $\alpha=21^0\,19'\,47''$, $\beta=68^0\,40'\,13''$, $c=338{,}16cm$. **4.** $45^0\,14'\,23''$. **5.** $36^0\,52'\,12''$. 6. Uçak B yerine uzaklığı 4182,78 *m* **,** A ve B arasındaki uzaklık ise 1223 ***m*.**

4.6.
1. a) $34^0\,24'\,36''$, b) $18^0\,16'\,12''$, c) $23^0\,40'\,12''$. **2.** a) $36{,}43^0$, b) $45{,}19^0$, c) $73{,}87^0$. **3.** a) $0{,}44\,rad$, b) $1{,}49\,rad$. **4.** a) 105^0, b) $72^0\,45'\,56''$. **5.** a) 0, б) 2, c) $\frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq 0$, **6.** a) 65^0, b) $47^0\,10'$, c) 30^0, d) 40^0. **7.** a) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, b) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\alpha=\frac{3}{4}$, c) $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $ctg\alpha=\frac{5}{3}$, d) $\sin\alpha=\frac{25}{\sqrt{674}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{674}}$, $tg\alpha=\frac{25}{7}$. **8.** a) 7, b) -1. **9.** a) $\beta=53^0\,58'$, $a\approx 40$, $b\approx 55$, b) $\alpha=25^0\,40'$, $b\approx 936{,}43$, $c\approx 1038{,}94$, c) $\alpha=4^0\,50'$, $a\approx 0{,}05$, $c\approx 0{,}622$, d) $\alpha=45^0\,57'\,5''$, $\beta=44^0\,2'\,55''$, $b\approx 222{,}48$, e) $\alpha=84^0\,44'\,6''$, $\beta=5^0\,15'\,54''$, $a\approx 42{,}32$. **10.** $b=a\pm 2c\cdot\cos\alpha$, $h=c\sin\alpha$. **11.** $2410m$.

5.1.
1. a) II- dördül , b) I- dördül , c) IV- dördül , d) III- dördül , e) $x-$ ekseni , f) $y-$ ekseni , g) $x-$ ekseni , h) $y-$ ekseni . **2.** $M(1{,}0)$, $N(-2{,}0)$, $P(5{,}0)$, $Q(-3{,}0)$. **3.** $M(0{,}3)$, $N(0{,}4)$, $P(0,-2)$, $Q(0,-1)$. **4.** $m_x=4$, $m_y=2$.

5.2.
1. a) $d=\sqrt{82}$, b) $d=4$, c) $d=3\sqrt{5}$, d) $d=3\sqrt{5}$. **3.** $y=11$ ya da $y=-1$. **4.** $C(21{,}18)$. **5.** 13.

5.3.

1. $S_{AB}\left(4,-\frac{5}{2}\right)$, $S_{BC}(2,1)$, $S_{AC}\left(1,-\frac{7}{2}\right)$. **2.** 5. **3.** $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(5,2)$. **4.** a) $\left(5,\frac{9}{5}\right)$, b) $\left(6,\frac{11}{5}\right)$, c) $(-7,-3)$, d) $(18,7)$. **5.** $A(-2,-6)$, $B(8,2)$, $C(-6,10)$.

5.4.

1. $P = 21$. 2. Hayır. 3. Evet. 4. $P = 15$. **5.** $P = \frac{55}{2}$. **6.** $P_{APB} = \frac{15}{2}$, $P_{PBC} = \frac{9}{4}$.

5.5.

1. Sadece P *doğrunundur*. **2.** a) $y = x$, b) $y = -x$, c) $y = 0$. **3.** a) $k = 2$, $m = -3$, b) $k = -1$, $m = 3$, c) $k = 0$, $m = -2$, d) $k = \sqrt{3}$, $m = 0$. **4.** $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$. **5.** $y = -x - 1$. **6.** $k = -\frac{6}{5}$, $m = \frac{7}{5}$. **7.** $y = -5x + 2$.

5.6.

1. a) $2x - 3y - 3 = 0$ b) $y + 4 = 0$ c) $x - 3 = 0$. **2.** a) $k = 2$, $m = 3$, b) $k = \frac{5}{2}$, $m = \frac{3}{2}$, c) $k = -\frac{3}{8}$, $m = -\frac{16}{3}$. **3.** $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $m = 3$. **5.** Evet.

5.7.

1. a) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$, 4 x – ekseninde 4 birim, y - ekseninde 6 birim, b) $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, 1 x - ekseninde 1 birim, y - ekseninde 1 birim, c) $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-2} = 1$ x - ekseninde $\frac{1}{2}$ birim, y - ekseninde 1 birim **2.** $k = \frac{6}{85}$. **3.** $k = \pm\frac{5}{12}$. **4.** 18 birim kare.

5. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$.

5.8.

1. a) $y + 3 = k(x - 2)$, b) $y - 4 = k(x + 1)$. **2.** $3x + y + 5 = 0$. **3.** $x + y + 3 = 0$. **4.** a) $k = -\frac{7}{5}$, b) $k = -5$, c) $k = 0$. **5.** $7x + 5y - 13 = 0$. **6.** Hayır. **7.** $d = \frac{7}{5}$ hayır. **8.** $d = \frac{2}{3}$. **9.** $d_M = \frac{10}{\sqrt{5}}$ ve $d_N = \frac{8}{\sqrt{5}}$. **10.** $x + y = 7 \pm 5\sqrt{2}$.

5.9.

1. a) (1,2) noktasında kesişiyorlar, b) paraleldirler, c) çakışıyorlar. **2.** a) (5,0) ve $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, b) $(-6,0)$ ve $(0,4)$. **3.** $5x - 6y + 28 = 0$. **4.** $\varphi = \frac{\pi}{4}$. **5.** $2x + y - 4 = 0$. **6.** $5x + 3y - 60 = 0$.

5.10.

1. $4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{13})$. **2.** a) $M(7,1)$, b) $M(7,1)$. **3.** $\lambda = \frac{1}{2}$. **4.** $P = 14$. **6.** $7x + 10y + 29 = 0$. **8.** $D(1,-5)$. **11.** a) $d = \frac{7}{5}$, b) $d = 1$. **12.** $x - 3 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$, $x + 3y - 13 = 0$. **13.** a) $T(-4,0)$, b) H(4,4). **15.** $M(-3,8)$. **16.** $P = 49$. **17.** $4x + 3y - 120$, $48x + 9y + 72 = 0$. **18.** $k_1 = -\frac{1}{3}$, $k_2 = 1$ ve $k_1 = -\frac{5}{3}$.

6. 1.

2. a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$, c) 2,4,8,16,32, d) $-1,2,-3,4,-5$. **3.** a) $\frac{4}{17}$, b) 27, c) 81. **4.** n=2010. **5.** n=256. **6.** a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{5}$, c) 16, d) 3. **7.** a) $a_n = 2n + 1$, b) n^2, c) $a_n = 2 + (-1)^n$, d) $a_n = \frac{1}{n}$, e) $a_n = \frac{8}{2^n}$.

6.1.

3. Dizi artandır. **4.** a), d) ve e) şıklarındaki diziler artandır, b) ve c)'deki diziler eksilendir. **5.** a) Hayır , b) ne artan ne de eksilendir. **6.** a) $a > 1$, b) $0 < a < 1$, c) $a = 1$.

6.3.

1. 299. **2.** 150. **3.** -77,6. **4.** a) ve c)'deki diziler aritmetik dizilerdir. a) şıkkındaki dizinin ilk terimi 2 ve ortak farkı 6'dır, c)'deki dizide ise, ilk terim 9, ortak fark -5'tir. **5.** 8 yıl sonra 1 ocak 2008 yılı. **6.** $d = 3$, $a_1 = 0$. **7.** Aritmetik dizisi. **8.** Tasarruf yapmadan önce 14000 denarı varmış ve her yıl 2500 denar tasarruf yapmıştır.

6.4.

1. a) 19, b) x. **2.** Aranılan terim a_{n+1} dir. **4.** n(n +1). **5.** a) 9399, b) 5850. **6.** 50. **7.** $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{20}$ *ve* $a_7 + a_{11} = a_5 + a_{13}$ oradan $a_{13} = a_{20}$ elde edilir, bu ise ancak $d = 0$ olduğu durumda mümkündür.

6.5.

1. 3. **2.** a) ve d) geometik dizilerdir . a) daki dizinin ilk terimi 2 ortak çarpanı ise -4 tür, d) şıkkındaki dizinin ilk terimi 1, ortak çarpanı 2 dir. **3.** a) 10,125, b) 96. **4.** a) 50,363%, b) 12 yıl. **5.** Ali. **6.** 256 defa.

6.6.

1. a) 60, b) x. **3.** Aranılan terim a_n+1. **4.** $b = 15$ ya da $b = 15$. **5.** a) 1640, b) 40, c) $\frac{255}{128}$,, d) 340. **6.** a) 3, b) 27. **7.** $a_1 = 9$, $S_5 = 6\frac{7}{9}$. olur.

6. 7.

2. Hayır. **3.** Hayır. **4.** 500500. **5.** 3000. **6.** 1840. **7.** $a = 5$, $b = 8$, $c = 11$. **8.** Tavsiye: a_k *ve* a_n terimlerinin değerlerini, aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı formülünde değiştirerek denklemin geçerli olduğunu gösteriniz. **9.** 2080 denar. **10.** 100. **11.** $b = 15$.
12. Tavsiye: a_k *ve* a_n terimlerinin değerlerini, geometrik dizisinin ilk n terim toplamı formülünde değiştirerek denklemin geçerli olduğunu gösteriniz. **13.** 1792. **14.** 20480 denar. **16.** $q = 1$.

7.1

1. a) 18750 denar; b) 937,5 denar c) 260,4 denar (30,360) zaman ölçüsüne göre ve 256,85 denar (k,365) göre. **2.** 20 yıl. **3.** 5%. **4.** a) 14750 denar b) 87500 denar.
5. $K = K_1 + K_2 = 108000$ denar. **6.** a) %6 *p.s.*; b) %3 *p.q.*; c) %1 *p.m.* **7.** a) %4 *p.s.*; b) %8 *p.a.*; c) $\frac{2}{3}$%*p.m.*. **8.** %9,091 *p.a.*(*a*). **9.** %11,11 *p.a.*(*d*). **10.** %6 *p.a.(a)* = %6.38 *p.a.(d)*, buna göre ikinci faiz oranı daha karlıdır %6,5 *p.a.(d)* .

7.2

1. a) Karma yöntem ile 84538 denar, sadece bileşik faiz hesabıyla 84483,43 denar,
b) karma yöntemi 88124,3 denar, sadece bileşik faiz hesabıyla 88117,29 denar.
2. 56331,55 denar. **3.** 59395,02 denar. **4.** 95600,58 denar. **5. Dönem sonu vadeli** 56059,84 denar dönem sonu faizlendirme 56400 denar dönem başı faizlendirme. **6.** 24099 denar. **7.** 17205 denar.

7.3.

1. 40642 denar. **2.** 7430 denar. **3.** a) 44160 denar; b) 43133,4 denar. a) ve c) şıklarındaki tutar farkları verilerin yuvarlanmasından kaynaklanır. **4.** %6. **5.** %3,923 ve %1,943. **6.** 16847 denar.

7.4.

1. a) $K = 75972{,}54$ denar; b) $K = 74617{,}11$ denar. **2.** a) 43291 denar; b) 42918,57 denar.
3. 250237,95 denar. **4.** 27532,75 denar. **5.** 54743,25 denar.

7.5.

1. a) 24 yıl, 6 ay ve 28gün; b) 23 yıl, 7 ay ve 11gün. **2.** a) 39,19 üç aylık ; b) 39,36 üç aylık **3.** a) %11,6196 *p.a.(a)*; b) %11,97 *p.a.(d)*;

4. %3,925 *p.a.(d).* **5.** %5 *p.q.(d)*, 4,7 *p.a.(a).* **6.** 10,077 yıl. **7.** %25 *p.s.(d).* **8.** %8,5 *p.a.(d).* **9.** 3 yıl, 1 ay ve 18 gün.

7.6.

1. Karma yöntemle 211440 denar, sadece bileşik faizle 210897,5 denar. **2.** 35546,5 denar. **3.** 112120 denar. **4.** 10930 denar. **5.** 186760 denar borç. **6.** a) 42252,7denar, faiz 7747,3 denar; b) 42254,6 denar, faiz 7745,4 denar. **7.** 27 yıl. **8.** 17,175 yıl. **9.** 21729,79 denar. **10.** 226765,67 denar. 11.. Son teklif 164893,32 . **12.** 21,65 üç aylık. **13.** %1,95. **14.** 125584 denar. **15.** 474831,14 denar. **16.** Birinci teklif daha uygundur, ikinci teklif daha küçüktür ve 52304,28 denardır. **17.** 18 yıl 4 ay ve 29 gün. **18.** 5209,48 denar. **19.** %6,6 *p.a. (d).* **20.** %7,57 *p.a.(d).* **21.** 24,6 yıl ve tutarı 10000 denardır.

8.2.

1. a) $S_n = 225558$ denar; b) $S_n = 227207$ denar. **2.** $S_n = 120061$ denar. **3.** a) $S_n = 39083$ denar; b) $S_n = 40646$ denar. **4.** a) 479782 denar; b) 482431denar. **5.** a) 484580 denar; b) 487304 denar. 4. ve 5. ödevlerin değerlerinin karşılaştırılmasıyla, dönem sonu yatırımları getirdikleri faiz miktarı, dönem başı yatırımların getirdikleri faizden daha büyük olduğu sonucuna varılır. En büyük son değer dönem başı yatırımların dönem başı faizlenmesiyle elde edilir.

8.3.

1. a) $V = 18781$ denar; b) $V = 18729$ denar. **2.** $V = 10000$ denar. **3.** $V = 2866$ denar. **4.** $V = 4603$ denar. **5.** $V = 6826$ denar.

8.4.

1. a) $n = 6$; b) $n = 5$. **2.** $n \approx 8{,}527$. O halde $n = 9$, $V_0 = 93048$ denar. **3.** $n \approx 31{,}195$. O halde $n = 32$, $V_0 =-279$ denar (demek ki, 279 denar geri verilecektir). **4.** $V_0 = 118$ denar. **5.** $n = 18$.

8.5.

1. $\frac{p}{2} = \%4$. **2.** $\frac{p}{3} = \%3{,}97$. **3.** a) %2,436; b) %2,674 . **4.** $p = \%8$. **5.** $p = \%7{,}55$.

8.6.

4. $M_n = 119041$ denar. **5.** a) $M_n = 15726$ denar; b) $M_n = 16355$ denar. **6.** $M_n = 637300$ denar. **7.** $V = 5695$ denar. **8.** 68044 denar.

8.7.

1. Dönem sonu faizlenme ile 7076,5 denar, dönem başı faizlenme ile 7089,5 denar elde edilir. **2.** $R = 16700$ denar. **3.** $R = 7575$ denar. **4.** $R = 5991$ denar. **5.** $R = 1670{,}5$ denar.

8.8.

1. 10 kira. **2.** $n = 8$, 4 yıl. **3.** $n = 12$, $R_0 = 32667$ denar. **4.** $n = 60$, $R_0 = 2160$ denar. **5.** $n = 35$, $R_0 = 28$ denar.

8.9.

1. p = %16,8 p. a (d). **2.** p = %5,756 *p. a (d).* **3.** p = %8 *p. a (d).* **4.** %9,13 *p. a (d).* **5.** 31136 denar.

8.10.

1. $R = 3400$ denar. **2.** 5220 denar. **3.** 4200 denar. **4.** 25000 denar. **5.** 203454 denar.

8.11.

1. 27403 denar. **2.** 1480 denar. **3.** 4 yatırım. **4.** %6,54. **5.** 8 yıl. **6.** $M_n = 286159{,}2$ denar. **7.** $R = 2475{,}25$ denar. **8.** $n = 12$, $R_0 = 3253{,}2$ denar. **9.** %5,75 *p.a(d).*
10. 11064,3 denar. **11.** 45000 denar. **12.** 175600 denar. **13.** 50000 denar. **14.** 3 yıl önce.
15. 1128 denar. **16.** 83972 denar. **17.** 870058 denar. **18.** 15940 denar. **19.** 202716 denar.
20. 4850 denar.

9.2

1. a) 96948,20 denar; b) 195825,05 denar; c) 393619,11 denar. **2.** 34651,4 denar.
3. 16650 denar. **4.** 8903,64 denar. **5.** 3057,85 denar.

9.3.

1. 16882,63 denar. **2.** Anüite 17483,63 denardır. **3.** Borç 713182,32 denardır.
4. 9538,09 denar. **5.** 5606,87 denar.

9.4.

1. Kalan 156137,24 denar. **2.** Ödeme 34462,95 denar. **3.** Borç 91269,92 denar. **4.** 27058,08 denar. **5.** 597738,82 denar.

9.5.

1. %8p.a.(d). **2.** $n = 25$ yılda 50 anüite. **3.** %3,67 *p.a.(d).* **4.** %4,13.
5. $n = 10$ yıl

9.6

1. a = 19076,19 denar, amortisman planı aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	100000	4000	15076,19	19076,19
2	84923,81	3396,95	15679,24	19076,19
3	69244,57	2769,78	16306,41	19076,19
4	52938,16	2117,53	16958,66	19076,19
5	35979,50	1439,18	17637,01	19076,19
6	18342,49	733,70	18342,49	19076,19
Toplam	361428,53	14457,14	100000	

2. $a = 15761{,}4$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	80000	4000	11761,4	15761,4
2	68238,6	3411,93	12349,47	15761,4
3	55889,13	2794,46	12966,94	15761,4
4	42922,19	2146,11	13615,29	15761,4
5	29306,9	1465,35	14296,05	15761,4
6	15010,85	750,54	15010,86	15761,4
Toplam	291367,67	14568,39	80000,01	

3. $a = 21631{,}54$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	100000	8000	13631,54	21631,54
2	86368,46	6909,47	14722,07	21631,54
3	71646,39	5731,71	15899,83	21631,54
4	55746,53	4459,72	17712,82	21631,54
5	38574,74	3085,98	18545,56	21631,54
6	20029,18	1602,36	20029,18	21631,54
Toplam	372365,33	29789,24	100000	

4. $a = 3154{,}71$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	10000	100	2154,71	3154,71
2	7846,29	784,6	2370,18	3154,71
3	5475,12	547,51	2067,19	3154,71
4	2867,92	286,83	2867,92	3154,71
Toplam	26188,33	2618,33	10000	

5. Son iki faizin verilerinden sistem oluşturunuz. $r = 1{,}1$, $\bar{u} = 6$, $a = 35431{,}22$, $Z = 154312{,}2$. elde edilir. Bu verilerle amortisman planını oluşturabilirsiniz.

9.7.

1. $Z = 142857$, 14 denar. **2.** 31 yıl. **3.** 14 devre. **4.** $Z = 100000$ ve $a = 30000$.
5. $a = 10000$ denar.

9.8.

1. $a_1 = 1467{,}83$ denar,

Devre	Borç kalanı	Faiz	Ödeme
1	60000	2400	1600
2	58400	2336	1664
3	56736	2269,44	1730,56
4	55005,44	2200,22	1799,78
5	53205,66	2128,23	1871,77
6	51333,89	2053,36	1946,64
7	49387,25	1975,49	2024,51
8	47362,74	1894,51	2105,49
9	45257,25	1810,29	2189,71
10	43067,54	1722,70	2277,30
11	40790,24	1631,61	2368,39
12	38421,85	1536,87	2463,13
13	35958,72	1438,35	2561,65
14	33397,07	1335,88	2664,12
15	30732,95	1229,32	2770,68
16	27962,27	1118,49	2881,51
17	25080,76	1003,23	2996,77
18	22083,99	883,36	3116,64
19	18967,35	758,69	3241,31
20	17526,04	629,04	3370,96
21	12355,08	494,20	3370,96
22	8849,28	353,97	3646,03
23	5203,25	208,13	3791,87
24	1411,38	56,56	1411,38

2. Anüite 3000 denar.

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	20000	600	2400	3000
2	17600	528	2472	3000
3	15128	453,84	2546,16	3000
4	12581,84	377,46	2622,54	3000
5	9959,30	298,78	2701,22	3000
6	7258,08	217,74	2782,26	3000
7	4475,82	134,27	2865,73	3000
8	1610,09	48,30	1610,09	1658,39

3. $a = 2800$, $a_1 = 455,7$

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	8000	400	2400	2800
2	5600	280	2520	2800
3	3080	154	2646	2800
4	434	21,7	434	455,7
Toplam	17144	855,7	8000	

4. $a = 60000$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	200000	8000	52000	60000
2	148000	5920	54080	60000
3	93920	3756,8	56243,2	60000
4	37676,8	1507,07	37676,8	39183,87
Toplam	479596,8	19183,87	200000	

5. $a = 2000$ denar, $a_1 = 1290,82$

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	20000	400	3600	2000
2	16400	328	3672	2000
3	12728	254,56	3745,44	2000
4	8982,56	179,65	3820,35	2000
5	5162,26	103,25	3896,75	2000
6	1265,51	25,31	1265,51	1290,82

9.9.

1. Anüite 36386,32 denar, toplam faiz tutarı 51090,56 denar. **2.** 230982,04 denar. **3.** 10006,18 denar. **4.** 266467 denar. **5.** 15300 denar. **6.** Borç 468019 denar, 200000 denar ödenmiş, borcun kalanı 268015 denar, faiz 165634 denardır. **7.** 45856,62 denar. **8.** 9126992 denar. **9.** Borç 36739,58 denar, kalan borç 12763,67 denar. **10.** 13140881 denar. **11.** 1877255 denar. **12.** 46 anüite eşit 47. farklı. **13.** 862025 denar. **14.** 6. **15.** %2. **16.** %2. **17.** 17705,37 denar. **18.** a = 20164,71 denar, O_{12} = 158449,71 denar ve R_8 = 141550,29 denar.

19. $a = 92298{,}75$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	500000	15000	77298,75	92298,75
2	422701,25	12681,04	79617,71	92298,75
3	343087,54	10292,51	82006,24	92298,75
4	261077,3	7832,32	84466,43	92298,75
5	176610,87	5298,33	87000,42	92298,75
6	89610,45	2681,31	89614,45	92298,75
Toplam	1793083,41	53792,51	500000	

20. $a = 55415{,}31$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	1000000	10000	45415,31	55415,31
2	954584,69	9545,85	45869,6	55415,31
3	908715,23	9087,15	46328,16	55415,31
4	862387,07	8623,87	46791,44	55415,31

21. $a = 25364{,}84$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
10	73149,23	1462,99	23901,85	25364,84
11	49247,38	984,95	24379,89	25364,84
12	24867,49	497,35	24867,49	25364,84

22. R_n, ve R_{n-1} kalanlarıyla sistem oluşturunuz. Oradan $n = 5$, $a = 48666{,}12$ denar ve borç $Z = 216653$ denar. **23.** 14 devre, yani 3,5 yıl. **24.** $a = 16000$ denar ve borç ċ$Z = 200000$ denar. **25.** $a = 16000$ denar, borç $Z = 200000$ denar, son anüite $a_1 = 14432$ denar.

26. $a = 30000$ denar,

Devre (periyot)	Borcun kalanı	Faiz	Ödeme	Anüite
1	120000	4800	25200	30000
2	94800	3792	26208	30000
3	68592	2743,68	27256,32	30000
4	41335,68	1653,43	28346,57	30000
5	12899,11	515,96	12899,11	13415,07

27. $p_1 = \%4$, $a = 4000$, $i_1 = 3000$, $b_1 = 3750$, $a_1 = 5987{,}27$. **28.** $p_1 = \%15$, $p = \%4$, $a = 2728{,}79$, $b_1 = 2200$, $i_1 = 800$. **29.** $p = \%4$, $p_1 = \%30$, $a = 30000$, $Z = 100000$. **30.** $p_1 = \%7{,}5$, $a = 7500$, $i_1 = 2000$, $b_1 = 5500$. **31.** $a = 12372{,}22$. **32.** $Z = 500000$. **33.** $Z = 300000$, $a = 13965{,}06$. **34.** $2n = 23$, $a_1 = 51235{,}02$.

Yararlanılan Kaynaklar

1. Arnold Glen, Essentials of Corporate Financial Management, Harlow, UK, 2007

2. Berk,J and De Marzo,P, Corporate Finance, Harlow, UK, 2009

3. Fabozzi J. Frank, Franco Moodigliani, Michael G. Ferri, Foundation of financial markets and institutions, 2nd ed., 2000

4. Gitman, Principles of Managerial Finance, Addison - Wesley, 2007

5. Gitman, Principles of Managerial Finance, 12th edn, Pearson, 2009

6. Mishkin, Eakins, Financial Markets and Institutions, Pearson, 2007

7. Sam Y. Cross, The Foreign Exchage Market, Federeal Reserve Bank of New York, 1998

8. S. G. Kellison, The theory of interest, Georgia State University, Irwin, 1991

9. Teresa Bradley, Paul Patton, Essential Mathematics for Economics and Business, John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2002

10. В. Попов, Математика за IV клас за стручните училишта, Просветно дело, Скопје, 1977

11. В. Враниќ, Основи финансијске и актуарске математике, Загреб 1964

12. Г. Тренчевски, Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2001

13. Д. Јанев, З. Коловски, Г. Вилбиловска, М. Стојановски, Математика за економисти, збирка задачи, Савремена администрација, Београд, 1991

14. Е. Стипаниќ, Математика за III и IV разред гимназије друштвено -језичног смера, Завод за издавање уџбеника Народне Републике Србије, Београд, 1962

15. З. Ивановски, А. Станковска, Девизна политика, Европски универзи-тет,2007

16. К. Сориќ, Збирка задатака из математике с примјеном у економији, Елемент, Загреб, 2005

17. К. Тренчевски, В. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска, Математичка анализа за четврта година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, 2003

18. М. Ивовиќ, Финансијска математика, Економски факултет, Веоград, 2003

19. Н. Давидовиќ, Основи на математиката за економисти, Култура, Скопје, 1975

20. Р. Раљевиќ, Финансијска и актуарска математика, Савремена администрација, Београд, 1975

Yazarlar
KostadinTrençevski
Aneta Gatsovska
Naditsa İvanovska

Bilgisayar İşlemleri
Yazarlar

Redaksiyon
D-r Aktan Ago

Lektör
Bedri Nuredin

Türkçeye Çeviren
Abdülgani Aliċ